

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND IX, HEFT 2-3

MIT 104 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 1. JULI 1955)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1955

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5
Tel. U 26 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band IX, Heft 2—3

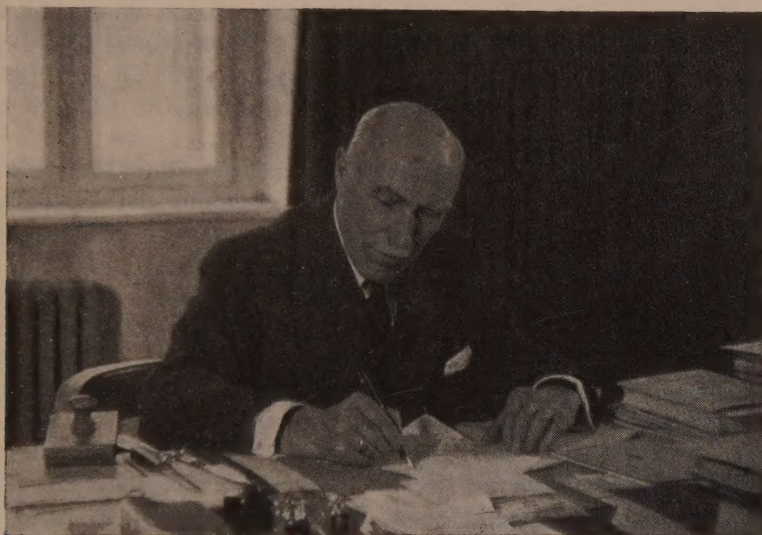
Inhaltsverzeichnis

	Seite
K. Girkmann, Professor Dr. Karl Federhofer 70 Jahre.	73
<i>Originalarbeiten</i>	
H. Beer, Ein baustatisches Verfahren zur Berechnung orthotroper Platten und Plattenroste. (Mit 6 Textabbildungen.)	78
H. Egger, Zur Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf die Ermittlung von Gleichgewichtslagen. (Mit 8 Textabbildungen.)	86
E. Friedrich, Die zusätzlichen Momente beim frei aufliegenden Balken infolge der elastischen Verformung. (Mit 14 Textabbildungen.)	94
O. K. Fröhlich, Kritik der gebräuchlichsten Verfahren zur Berechnung der Sicherheit von Böschungen gegen Rutschung. (Mit 9 Textabbildungen.)	106
K. Girkmann, Geschweißter Anschluß eines zugbeanspruchten Flachstabes bei behinderter Verformung. (Mit 3 Textabbildungen.)	118
R. Grammel, Diophantische Vektorgleichungen.	126
G. Heinrich, Der Energiestrom in elastischen Medien.	148
K. Karas, Zur Berechnung rotierender Scheiben vorgegebenen Profils. (Mit 3 Textabbil- dungen.)	157
E. Melan, Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder. (Mit 3 Textabbildungen.)	171
W. Mudrak, Zu den Waagerechtschwingungen von Dampfturbinenfundamenten. (Mit 5 Text- abbildungen.)	175
H. Nylander, Die Durchschlagslast von Platten. (Mit 6 Textabbildungen.)	181
H. Parkus, Membranspannungen in der schiefen Kreiskegelschale. (Mit 2 Textabbildungen.)	196
A. Pflüger, Die orthotrope Platte mit Hohlsteifen. (Mit 8 Textabbildungen.)	199
A. Pischinger und F. Pischinger, Neue Untersuchungsergebnisse an Brennstoffstrahlen. (Mit 10 Textabbildungen.)	207
Th. Pöschl, Bemerkung über Stoßprobleme für verbundene Systeme nach der Lagrangeschen Methode.	216

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Professor Dr. Karl Federhofer 70 Jahre.

Ord. Prof. Dipl.-Ing., Dr. techn. h. c., Dr. rer. nat. E. h., Dr. techn. Karl Federhofer, Vorstand des Institutes für Technische Mechanik an der Technischen Hochschule in Graz, wurde am 5. Juli 1885 in Knittelfeld in der Obersteiermark geboren. Er besuchte die Staats-Oberrealschule in Linz und die Landes-Oberrealschule in Graz.



Sodann studierte er an der Technischen Hochschule in Graz das Bauingenieurfach und legte 1908 die zweite Staatsprüfung ab. An dieser Hochschule sind F. Wittenbauer und Ph. Forchheimer seine bedeutendsten Lehrer gewesen; durch sie erhielt er die Grundlagen zu seiner besonderen Ausbildung auf dem Gebiete der gesamten technischen Mechanik.

Nach kurzer Tätigkeit bei der Staatsbahndirektion in Linz trat Federhofer in den steiermärkischen Staatsdienst ein. Er war mit dem Entwurf von zahlreichen Straßenbrücken befaßt und war auch Bauleiter bei einer Reihe von größeren Reichsstraßenbrücken. Während des ersten Weltkrieges ist ihm das gesamte Brückenbaureferat des steiermärkischen Staatsbaudienstes anvertraut gewesen.

Federhofer war stets bestrebt, neben der beruflichen Tätigkeit seine theoretische Ausbildung zu vervollkommen und eine schöpferisch-wissenschaftliche Tätigkeit zu entfalten. Bereits im Jahre 1909 war er an der Technischen Hochschule in Graz zum Doktor der technischen Wissenschaften promoviert worden. Der Titel seiner bedeutsamen Dissertation lautete: „Ermittlung der Bogenwirkung in Talsperren“. Im Jahre 1913 habilitierte sich Federhofer als Privatdozent an der Montanistischen Hochschule in Leoben auf Grund seiner Habilitationsschrift „Zur strengen Theorie

der Bogenträger“. Noch im gleichen Jahre erschien sein Name im Besetzungsvorschlag für das Ordinariat der Mechanik an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

Im Jahre 1918 wurde Federhofer von der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn *primo et unico loco* auf die Lehrkanzel für Mechanik berufen. Doch konnte er dieser Berufung erst im Juli 1920 Folge leisten, als die neue Regierung der ČSR. der Ernennung zugestimmt hatte. Beim Ausscheiden aus dem österreichischen Bundesdienst wurde Federhofer der Titel Baurat verliehen.

Zu dieser Zeit finden wir den Namen Federhofers auch in Besetzungsvorschlägen der Technischen Hochschulen Graz (1919, für Mathematik), Darmstadt (1920, für Technische Mechanik) und Wien (1921, für Allgemeine Mechanik); er blieb aber zunächst in Brünn. Im Jahre 1922 berief ihn die Technische Hochschule Graz als Ordinarius für allgemeine Mechanik, Hydro- und Aeromechanik. Federhofer nahm an und wurde damit der Nachfolger seines Lehrers F. Wittenbauer, dessen weltbekannte Mechanikschule er mit größtem Erfolg weiterführt und im Einklang mit den fortschreitenden wissenschaftlichen Erkenntnissen stetig ausgebaut hat.

Prof. Federhofer ist seiner Grazer Hochschule bis heute treu geblieben, obwohl ihn die Technischen Hochschulen München (1931), Wien (1939) und Breslau (1941) für sich gewinnen wollten. Während der Studienjahre 1925/26 und 1926/27 war er Dekan der Fakultät für Bauingenieurwesen. Im Studienjahr 1928/29 bekleidete er die Würde des Rector magnificus.

Seine hohen wissenschaftlichen Verdienste brachten ihm 1935 die Wahl zum korrespondierenden Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften und im Jahre 1939 wurde er zum wirklichen Mitglied gewählt. Nach dem Tode von Prof. Treffitz, im Jahre 1938, wurde er Mitglied des wissenschaftlichen Ausschusses der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. 1950 wurde er zum korrespondierenden Auslandsmitglied der Akademie der Wissenschaften in Tucuman (Argentinien) gewählt. Anlässlich seines 65. Geburtstages haben Freunde und Fachkollegen eine Festschrift mit zahlreichen Abhandlungen von in- und ausländischen Autoren herausgegeben¹. Die Technische Hochschule in Wien verlieh ihm 1953 das Ehrendoktorat der technischen Wissenschaften und im Jahre 1955 wurde er Ehren doktor der Naturwissenschaften an der Technischen Hochschule Darmstadt.

Prof. Federhofer hat Fachreferate auf den Getriebetagungen in Dresden (1928 und 1930), bei der Reuleaux-Feier der Technischen Hochschule in Wien (1931) und auf der Getriebetagung in Karlsruhe (1932) gehalten. Eingeladen vom Internationalen Kongreßkomitee für angewandte Mechanik, dessen Mitglied er schon 1934 als Nachfolger Forchheimers geworden war, nahm er an den nachstehenden Internationalen Kongressen für angewandte Mechanik teil: Zürich (1926), Stockholm (1930), Cambridge-England (1934), Cambridge-USA (1938), London (1948) und Istanbul (1952); bei den fünf letztgenannten Kongressen war er der offizielle Vertreter Österreichs. Er ist stets als Vortragender aufgetreten, ist aber auch als Verhandlungsleiter tätig gewesen. Auch an den Tagungen der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Freiburg (1951) und Aachen (1953) hat er Vorträge gehalten.

Prof. Federhofer zählt zu den wenigen Gelehrten, die auch heute noch das Gesamtgebiet der technischen Mechanik beherrschen. Es ist müßig, die Verdienste dieses in aller Welt bekannten Forschers und Lehrers des langen zu schildern. Sein Werk spricht für ihn: bisher hat er sieben Bücher und 122 Abhandlungen veröffentlicht. Federhofer ist auch ein ausgezeichnete Lehrer, dem viele, zu Rang und Namen gelangte Absolventen der Technischen Hochschule in Graz ihre Ausbildung und Erfolge verdanken. Nicht nur durch sein Wissen und Können und durch seine Erfahrung,

¹ „Beiträge zur angewandten Mechanik“, 415 S., 151 Abb., in Kommission bei: Franz Deuticke-Verlag, Wien I, 1950.

sondern auch durch verständnisvolles Entgegenkommen, durch Hilfsbereitschaft und ruhig vornehme Einfachheit hat sich Prof. Federhofer überall Freunde erworben.

Die zahlreichen Schüler, Fachkollegen und Freunde aus aller Welt beglückwünschen den schaffensfreudigen Jubilar vom ganzen Herzen zu seinem 70. Geburtstag.

K. Girkmann.

Originalarbeiten.

a) Bücher.

1. Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. 81 S., mit 48 Abb. und 5 Tafeln. Wien: Springer-Verlag. 1928.
2. Graphische Kinematik und Kinetostatik (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, H. 2). 112 S., mit 27 Figuren. Berlin: Springer-Verlag. 1932.
3. Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes, mit besonderer Berücksichtigung von dünnwandigen und offenen Querschnitten. 179 S., mit 35 Abb. und 26 Zahlentafeln. Wien: Springer-Verlag. 1950.
4. bis 6. Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Wien: Springer-Verlag.
I. Teil: Statik. 130 S., mit 243 Abb. (165 Aufgaben nebst Lösungen). 1950.
II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 103 S., mit 105 Abb. (113 Aufgaben nebst Lösungen). 1951.
III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 139 S., mit 191 Abb. (149 Aufgaben nebst Lösungen). 1951.
7. Aufgaben aus der Hydromechanik. 221 S., mit 235 Abb. (245 Aufgaben nebst Lösungen). Wien: Springer-Verlag. 1954.

b) Abhandlungen.

1. Zur Festigkeit radial belasteter Kreisbogen. S.-B. Akad. Wiss. Wien 118/2 (1909).
2. Graphisches Verfahren für die Ermittlung der Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton u. Eisen, Jg. 8 (1910).
3. Theorie des elastischen Kreisbogens. Z. Arch. Ing.-Wesen 56 (1910).
4. Zur strengen Theorie der Bogenträger. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst, Jg. 17 (1911).
5. Zur Berechnung des Kreisringes. Z. Arch. Ing.-Wesen 58 (1912).
6. Beitrag zur Berechnung kontinuierlicher Bogenträger. Schweiz. Bau-Ztg. 60 (1912).
7. Die Ermittlung des Einflusses von Temperaturveränderungen bei einem elastischen, an den Enden eingespannten Bogenträger. Z. Math. Phys. 60 (1912).
8. Über die Formänderung gelenkloser Gewölbe. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst, Jg. 18 (1912).
9. Über die Berechnung der Spannungsverteilung in flachen Kugelschalen. S.-B. Akad. Wiss. Wien 121 (1912).
10. Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers. Z. Math. Phys. 62 (1913).
11. Über die Formbestimmung des Wölbmantelbeckens. Eisenbau, Jg. 4 (1913).
12. Über die strenge Ermittlung der Form einer allseitig eingespannten Rotationsmembrane mit besonderer Anwendung auf die Formbestimmung des Wölbmantelbeckens. Eisenbau, Jg. 5 (1914).
13. Zur Berechnung gekrümmter Staumauern. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst, Jg. 20 (1914).
14. Berechnung der Spannungen in flachen Kugelschalen bei gleichförmigem Oberflächen- druck. S.-B. Akad. Wiss. Wien 124 (1915).
15. Zur Theorie des Kugelgewölbes. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst, Jg. 21 (1915).
16. Elastizität der flachen Kugelschale bei gleichförmigem Oberflächendrucke. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst, Jg. 22 (1916).
17. bis 19. Mitteilungen über die Stabilität der Kugelschale. S.-B. Akad. Wiss. Wien 125 (1916), 126 (1917), 127 (1918).
20. Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. Physik. Z., Jg. 18 (1917).
21. Über die Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Eisenbau, Jg. 9 (1918).
22. Über die räumliche Formänderung des Bogenträgers. Z. Arch. Ing.-Wesen 67 (1921).
23. Über die Querknickung gleichmäßig gedrückter Kreisringe. Eisenbau, Jg. 12 (1921).
24. Dynamik sich ändernder Massen. Mitt. Dtsch. Ing.-Verein Mähren, Jg. 11 (1922).
25. Zur Synthese der Getriebe. Z. angew. Math. Mechan. 3 (1923).
26. Über die Kipplast krummer Stäbe. Bautechnik, Jg. 2 (1924).
27. Über die Kipplasten des krummen Stabes. S.-B. Akad. Wiss. Wien 134 (1925).

28. Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven. S.-B. Akad. Wiss. Wien **135** (1926); Z. Ver. dtsh. Ing. **69/2** (1925).
29. Konstruktion der Beschleunigungen bei der schwingenden Kurbelschleife. Z. Ver. dtsh. Ing. **70/1** (1926).
30. Berechnung der Auslenkung beim Kippen gerader Stäbe. Z. angew. Math. Mechan. **6** (1926); Z. Ver. dtsh. Ing. **70/1** (1926).
31. Über das Einbeulen von Kreisringen. S.-B. II. Internat. Kongr. Techn. Mechan., Zürich 1926.
32. Über die Beschleunigung bei der räumlichen Bewegung des starren Körpers. Z. angew. Math. Mechan. **7** (1927).
33. Graphische Kinematik räumlicher Systeme. Vortrag, gehalten auf der Tagung für Getriebelehre in Dresden, Sept. 1928. Auszug hievon in Maschinenbau **7** (1928).
34. Graphische Kinematik des Taumelscheibentriebes. Z. angew. Math. Mechan. **9** (1929).
35. Graphische Kinematik der räumlich schwingenden Kurbelschleife. S.-B. Akad. Wiss. Wien **138** (1929).
36. Kinetostatik flächenläufiger Systeme. S.-B. Akad. Wiss. Wien **139** (1930).
37. Die resultierenden Trägheitskräfte eben bewegter Scheiben. Z. Ver. dtsh. Ing. **74** (1930).
38. Kinetik ebener Getriebe. Vortrag, gehalten auf der III. Tagung für Getriebelehre in Dresden, 26. April 1930.
39. Räumliche Kinematik. Vortrag, gehalten im österr. Ver. dtsh. Ing. in Wien, 10. April 1930.
40. Notiz über den für die Internationale Tagung für Technische Mechanik in Stockholm in Aussicht genommenen Vortrag (1930).
41. Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe mit veränderlicher Höhe. S.-B. III. Internat. Kongr. Techn. Mechan., Stockholm 1931.
42. Neue Beiträge zur Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe. S.-B. Akad. Wiss. Wien **140** (1931).
43. Zur graphischen Dynamik des zwangsläufigen ebenen Systems. Mh. Math. Phys. **38** (1931).
44. Zur graphischen Dynamik der Mehrkurbelgetriebe. Ingenieur-Arch. **1** (1931).
45. Zur Konstruktion des Momentenvektors für die graphische Behandlung der Kinematik und Statik des Raumes. Z. angew. Math. Mechan. **11** (1931).
46. Biegungsschwingungen eines Kreisringes bei konstantem Außen- und Innendrucke. Ingenieur-Arch. **4** (1933).
47. Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl des radial belasteten Kreisbogens. Ingenieur-Arch. **4** (1933).
48. Über die Eigenschwingungen eines dünnwandigen, allseits von Flüssigkeit umgebenen Hohlzylinders. S.-B. Akad. Wiss. Wien **142** (1933).
49. Grundschwingzahlen der elastischen Querschwingungen dreifach gelagerter Träger. Bau-technik, Jg. **11** (1933).
50. Ermittlung des Beschleunigungspoles der ebenen Systembewegung. Z. angew. Math. Mechan. **13** (1933).
51. Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl eines Fachwerkes. Stahlbau, Jg. **14** (1934).
52. Über Eigenschwingungen und Knicklasten des parabolischen Zweigelenkbogens. S.-B. Akad. Wiss. Wien **143** (1934).
53. Zur Theorie des Beschleunigungszustandes der ebenen Systembewegung. S.-B. Akad. Wiss. Wien **143** (1934).
54. Eigenschwingungen der geschlossenen Kugelschale bei gleichförmigem Oberflächendrucke. (Beitrag zur Festschrift zum 60. Geburtstag L. Prandtls.) Z. angew. Math. Mechan. **15** (1935).
55. Biegungsschwingungen der in ihrer Mittelebene belasteten Kreisplatte. Ingenieur-Arch. **6** (1935).
56. Zum Aufsätze F. W. Waltkings über Schwingzahlberechnung von Kreisbogenträgern. Ingenieur-Arch. **6** (1935).
57. Zweidimensionale Theorie der Biegungsschwingungen des Kreisringes mit rechteckigem Querschnitte. S.-B. Akad. Wiss. Wien **144** (1935).
58. Über den Einfluß der Achsendehnung, der Rotationsträgheit und der Schubkraft auf die Frequenz der Biegungsschwingungen eines Kreisringes. S.-B. Akad. Wiss. Wien **144** (1935).
59. Zur Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **7** (1936).
60. Über die Eigenschwingungen des senkrecht zu seiner Ebene schwingenden Kreisbogens. S.-B. Akad. Wiss. Wien **145** (1936).

61. Über die Berechnung der kleinsten Knickbelastung des flachen parabolischen Zweigelenkbogens. Bautechnik, Jg. 14 (1936).
62. Über die Eigenschwingungen der axial gedrückten Kreiszyinderschale. S.-B. Akad. Wiss. Wien 145 (1936).
63. Zur Ermittlung des Druckmittelpunktes in der Hydrostatik. Ingenieur-Arch. 8 (1937).
64. Über die Eigenschwingungen der Kugelschale. Mitt. 1, 2; S.-B. Akad. Wiss. Wien 146 (1937).
65. Über die Verwertung der Ergebnisse von Frequenzberechnungen gedrückter elastischer Systeme zu deren Stabilitätsuntersuchung bei Vorhandensein eines elastischen Widerstandes. Ingenieur-Arch. 8 (1937).
66. Zur graphischen Dynamik des Gelenkviereckes. Arch. Getriebetechn. 5 (1937).
67. Eigenschwingungen der Kegelschale. Ingenieur-Arch. 9 (1938).
68. Der vollkommen biegsame Faden unter hydrostatischem Druck. Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels von R. Schjödtt. Z. angew. Math. Mechan. 18 (1938).
69. Über Schalen gleicher Festigkeit. Bau-Ing., Jg. 20 (1939).
70. Über die Eigenschwingungen der Zylinder-, Kegel- und Kugelschalen. Proc. V. Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge (USA) 1939.
71. Schwingzahlberechnung des dünnwandigen Hohlreifens. Ingenieur-Arch. 10 (1939).
72. Zur Stabilität der Katenoidschale. S.-B. Akad. Wiss. Wien 148 (1939).
73. Der senkrecht zu seiner Ebene schwingende Kreisbogensträger mit I-Querschnitt. Z. angew. Math. Mechan. 20 (1940).
74. Berechnung der Auslenkung beim Ausbeulen dünner Kreisplatten. Ingenieur-Arch. 11 (1940).
75. Knickung der Kreisplatte und der Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke. Ingenieur-Arch. 11 (1940).
Berichtigung zu vorstehendem Aufsätze. Ingenieur-Arch. 11 (1940).
76. Tragfähigkeit der über die Beulgrenze belasteten Kreisplatte. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 11 (1940).
77. Berechnung der kleinsten Knicklast einer schwach verjüngten oder verdickten Kreisringplatte. S.-B. Akad. Wiss. Wien 149 (1940).
78. Zur Knickung der Kreisringplatte veränderlicher Dicke. S.-B. Akad. Wiss. Wien 149 (1940).
79. Einfache Bestimmung des Viereckschwerpunktes. Z. angew. Math. Mechan. 21 (1941).
80. Über besondere Seilkurven. Z. angew. Math. Mechan. 21 (1941).
81. Über die Bewegung zugeordneter Punkte einer ebenen Kurve und ihrer Inversen. Arch. Getriebetechn. 9 (1941).
82. Eigenschaften der Ellipse an den Diagonalschnittpunkten. Z. math. naturw. Unterricht, Jg. 72 (1941).
83. Über den Einfluß von Ungenauigkeiten der Form und Stärke eines Kreisringes auf die Schwingzahlen seiner ebenen Biegungsschwingungen. S.-B. Akad. Wiss. Wien 150 (1941).
84. Die Knicklast eines gleichmäßig gedrückten Zweigelenkbogens mit exponentiell veränderlichem Trägheitsmoment. Bau-Ing., Jg. 22 (1941).
85. Schwingzahlberechnung des Zweigelenkbogens mit exponentiell veränderlichem Trägheitsmoment. (Mit Dr. Egger.) S.-B. Akad. Wiss. Wien 151 (1942).
86. Zur strengen Berechnung liegender weiter Rohre. Wasserkraft Wasserwirtschaft 38 (1943).
87. Knickung der auf Scherung beanspruchten Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke. (Mit Dr. Egger.) Ingenieur-Arch. 14 (1943).
88. Berechnung der Auslenkung und Spannungen beim Kippen des geschlossenen Kreisringes. Z. angew. Math. Mechan. 23 (1943).
89. Zur Geometrie des Beschleunigungszustandes der ebenen Systembewegung. S.-B. Akad. Wiss. Wien 153 (1944).
90. Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Luftfahrt-Forsch. 21 (1944).
91. Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. (Beitrag zur Festschrift zum 70. Geburtstag L. Prandtls.) Z. angew. Math. Mechan. 25 (1945).
92. Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. Österr. Ingenieur-Arch. 1 (1946).
93. Berechnung der dünnen Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. (Mit Dr. Egger.) 2. Mitt., S.-B. Akad. Wiss. Wien 156 (1947).
94. Die Grundgleichungen für elastische Platten veränderlicher Dicke und großer Ausbiegung. Z. angew. Math. Mechan. 25/27 (1947).
95. Eigenschwingungen von geraden Stäben mit dünnwandigen und offenen Querschnitten. S.-B. Akad. Wiss. Wien 156 (1947).
96. Berechnung der Drehschwingungen eines Kreiszyinders mit Berücksichtigung des Einflusses der Baustoffdämpfung und einer äußeren Flüssigkeitsreibung. S.-B. Akad. Wiss. Wien 156 (1947).
97. Berechnung der Grundschwingzahl der gleichmäßig belasteten dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Österr. Ingenieur-Arch. 2 (1948).

98. Theorie des Kippens des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfach symmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichförmiger Radialbelastung. Österr. Ingenieur-Arch. **3** (1949).
99. Auszug hievon als kurze Mitt. in: S.-B. Akad. Wiss. Wien **157** (1949) und Proc. VII. Int. Congr. Appl. Mech., London 1948.
100. Über die Biegungs-Drillungsschwingungen des Kreisringes mit doppelt-symmetrischem Querschnitte. S.-B. Akad. Wiss. Wien **157** (1949).
101. Zur graphischen Kinetostatik ebener Getriebe. Österr. Ingenieur-Arch. **4** (1950).
102. Zur Berechnung zylindrischer Behälter mit veränderlicher Wandstärke. Anz. Akad. Wiss. Wien **1950**, Nr. 11.
103. Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes. Österr. Ingenieur-Arch. **5** (1951).
104. Spannungen in schwach ausgebauchten zylindrischen Behältern. Österr. Bau-Z., Jg. 6 (1951).
105. Trägheitspolkurve, ein Beitrag zur Dynamik des ebenen Systems. Z. angew. Math. Mechan. **31** (1951).
106. Zum Elastizitätsproblem des zylindrischen Flüssigkeitsbehälters veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mechan. **31** (1951).
107. Berechnung des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters mit quadratisch veränderlicher Wandstärke. Österr. Ingenieur-Arch. **6** (1952).
108. Stabilität der Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke. Österr. Ingenieur-Arch. **6** (1952) und Anz. Akad. Wiss. Wien **1952**, Nr. 1.
109. Contribucion al Calculo de Diques en Cupula. De „Tecnica“ Revista de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia (Univ. Tucuman), Vol. 1 (1952).
110. Eine Erweiterung der Behältergleichung als Grundlage für die Berechnung der Bogenstau-mauern. Anz. Akad. Wiss. Wien **1952**, Nr. 2.
111. Über die Eigenschwingungen der Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke. S.-B. Akad. Wiss. Wien **161** (1952).
112. Die Frequenzgleichung der Biegeschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit einer Punktmasse und gleichförmiger Auflast. Österr. Ingenieur-Arch. **7** (1953).
113. Trägheitspolkurve als Hilfsmittel der Dynamik ebener Getriebe. VDI-Tagungsheft 1953.
114. Der senkrecht zu seiner Ebene belastete, elastisch gebettete Kreisringträger. v. Mises Anniversary Volume, Academic Press, Inc., 1954.
115. Auszug hievon in Z. angew. Math. Mechan. **33** (1953).
116. Knicklast der axial gedrückten Kreiszyinderschale bei Vorhandensein eines entlang des Zylindermantels veränderlichen elastischen Widerstandes. Österr. Ingenieur-Arch. **8** (1954).
117. Die durch pulsierende Axialkräfte gedrückte Kreiszyinderschale. S.-B. Akad. Wiss. Wien **163** (1954).

c) Verschiedenes.

118. Fortschritte der technischen Aerodynamik. Inaugurationsrede am 20. Nov. 1928. Graz: Leuschner und Lubensky.
119. Das aeromechanische Laboratorium. Die Laboratorien der T. H. Graz (1936).
120. Dem Schöpfer der graphischen Dynamik: Ferdinand Wittenbauer. Ein Gedenkblatt. Reuleaux-Mitteilungen. Arch. Getriebetechn. **4** (1936).
121. Richard Grammel zum 60. Geburtstag. Österr. Ingenieur-Arch. **3** (1949).
122. Die Technische Hochschule Graz. Steiermark-Buch, 1954.

Ein baustatisches Verfahren zur Berechnung orthotroper Platten und Plattenroste.

Von H. Beer, Graz.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die orthotrope, drillsteife Platte wird in zwei sich rechtwinklig kreuzende Trägerscharen zerlegt und jeder dieser Träger mit einem fiktiven Lastanteil belastet, welcher in ihm dieselbe statische Wirkung hervorruft, wie sie im entsprechenden Streifen der orthotropen Platte entsteht. Dieses Lastaufteilungsverfahren ermöglicht mit praktisch ausreichender Genauigkeit die Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen in der Platte, wobei ihre Drillsteifigkeit volle Berücksichtigung findet. Die Methode wird hier auf die an den Rändern frei-

aufliegende Rechteckplatte angewandt und für verschiedene Lastfälle erläutert. Ihre Anwendung auf die elastisch eingespannte Platte wird einer späteren Arbeit vorbehalten.

Summary. The orthotropic, torsion resistant plate is decomposed in two series of beams intersecting each other at right angles, each beam being loaded by a fictive load portion which is assumed to cause in the beam the same statical effect that results in the corresponding strip of the orthotropic plate. This load distribution method enables one to compute, with an accuracy sufficient for practical purposes, the sectional forces and the deflections occurring in the plate, under full consideration of its torsional rigidity. In this paper the method is applied to the rectangular plate supported freely on its boundaries, and is explained for various types of loading. An application to the elastically clamped plate will be given in another paper.

Résumé. La dalle orthotrope, rigide et résistante à la torsion, est décomposée en deux séries de poutres se croisant à angle droit, et chacune de ces poutres soumise à une partie fictive de la charge. Celle-ci produit dans la poutre le même effet que dans la partie correspondante de la dalle orthotrope. Ce procédé de répartition des charges permet de calculer avec une exactitude pratiquement suffisante, les forces de section et la flexion dans la dalle, en tenant entièrement compte de sa rigidité résistante à la torsion. Cette méthode est appliquée ici à la dalle rectangulaire reposant librement sur les bords, et commentée pour différents cas de charge. Son utilisation pour la dalle encastrée de façon élastique fera l'objet d'un travail ultérieur.

I. Einleitung.

Die Verfahren der Elastizitätstheorie zur Berechnung von Platten beruhen auf der Ermittlung der Durchbiegefläche $w(x, y)$, aus der dann in bekannter Weise

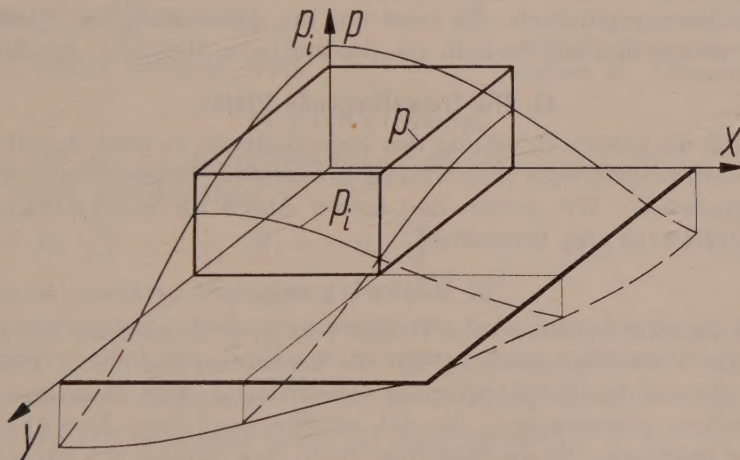


Abb. 1. Darstellung von p und $p_i = B \cdot \Delta \Delta w$ (für ein Plattenviertel).

durch zweimalige Differentiation die Biege- und Drillmomente und durch dreimalige Differentiation die Querkräfte berechnet werden. Der Verfasser hat in einer in spanischer Sprache erschienenen Arbeit¹ auf die große Fehlerempfindlichkeit dieser Methode hingewiesen, die um so mehr Bedeutung besitzt, als die biharmonische Gleichung eine direkte Integration für die Rechteckplatte nicht gestattet und daher die Biegefläche stets in Reihenform dargestellt werden muß.

Wir können uns die Ungenauigkeit, welche in den höheren Ableitungen einer in Reihenform gegebenen Funktion entsteht, recht deutlich am Beispiel einer Platte unter Gleichlast p im mittleren Teil vor Augen führen: Ermitteln wir die Biegefläche mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit unter Verwendung von vier Polynomen und rechnen wir die ideale Belastung $p_i = B \Delta \Delta w$ (wobei B die Biegesteifigkeit der

¹ H. Beer: Cálculo aproximado de losas con armadura cruzada. (Näherungsberechnung kreuzweis bewehrter Platten.) Rev. Técnica Tucumán 1, Nr. 2, 62—79 (1951).

Platte ist), welche dieser Biegefläche entspricht, so erhalten wir erhebliche Abweichungen dieser Last p_i (Abb. 1) von der Ausgangslast p . Ja sogar verschiedene Berechnungsmethoden der Elastizitätslehre geben erhebliche Unterschiede in der ideellen Belastung p_i^2 . Nach viermaliger Differentiation haben sich somit ganz kleine Ungenauigkeiten in der Biegefläche vervielfacht und man erhält ein stark verändertes Lastbild, trotzdem mit der Ermittlung dieser Biegefläche schon ein erheblicher Rechenaufwand verbunden ist.

Der Verfasser hat daher in der erwähnten Arbeit den umgekehrten Weg beschritten und anknüpfend an eine Abhandlung von P. P. Bijlaard³ versucht, die Berechnung von Rechteckplatten in diejenige von Ersatzbalken umzuwandeln, die so belastet sind, daß ihr statisches Verhalten jenem des entsprechenden Plattenstreifens gleichwertig ist. Es wird hierbei die wichtige Tatsache verwendet, daß die Integration (Mittelwertbildung) fehlerausgleichend ist, während — wie dargelegt — die Differentiation den Fehler verstärkt. Da wir hier von der Last ausgehen wollen, so erhalten wir durch zweimalige Integration das Biegemoment und durch viermalige Integration die Biegefläche. Diese wiederholte Mittelwertbildung gestattet eine Näherungsannahme für die Lastkurve des Ersatzbalkens, welche einen plausiblen Verlauf haben muß und sowohl die Plattenlast in beiden Richtungen abtragen als auch den Einfluß der Drillsteifigkeit voll berücksichtigen muß. Außerdem werden noch gewisse Verträglichkeitsbedingungen zu erfüllen sein.

Wie die praktische Berechnung zeigt, ist das Verfahren einfach, anschaulich und weitgehend fehlerunempfindlich. Es setzt nur die Anwendung der Statik des biegefesten Stabes voraus und soll deshalb als „baustatische Methode“ bezeichnet werden.

II. Die freiaufliegende Platte.

Wir zerlegen die ideelle Belastung des Ersatzbalkens in zwei Anteile, welche der Wirkung der drillweichen, sich rechtwinklig kreuzenden Trägerscharen und der Drillmomente entsprechen. Wir wollen den ersten Anteil als Rostwirkung und den zweiten als Drillwirkung bezeichnen.

a) Rostwirkung.

Setzen wir zunächst symmetrische Vollast voraus, so können wir mit ausreichender Genauigkeit das Verteilungsgesetz q_x' für die Lastabtragung des X-Balkens folgend erhalten: Von der auf die Platte wirkenden Gesamtlast q (Abb. 2) wird ein Teil $q - q_x'$ von den Y-Balken aufgenommen, die sich entsprechend ihrer Durchbiegung an der Lastabtragung beteiligen. Da die Biegelinie durch eine Parabel roh angenähert werden kann, nehmen wir auch das Verteilungsgesetz von $q - q_x$ als Parabel an, so daß für den X-Balken das in Abb. 2 schraffierte Belastungsdiagramm q_x' verbleibt. Für die Y-Balken gelten analoge Überlegungen. Um nun die ganze Last durch die beiden Balkenscharen abzutragen, muß $q_x' + q_y' = q$ sein. Die Verträglichkeitsbedingungen (gleiche Durchbiegung) wollen wir nur für die Mitte aufstellen und erhalten so die Lastordinaten q_{xm}' und q_{ym}' . Damit aber ist die Rostwirkung bekannt.

Für die orthotrope Platte führen wir die Biegesteifigkeiten $B_x = E_x J_x$, $B_y = E_y J_y$ ein und setzen zur Abkürzung $\beta = \frac{B_x}{B_y}$ und $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$, wobei $l_x < l_y$. In erster Näherung wird dann:

$$q_{xm}' = q_m \frac{\beta \lambda^4}{1 + \beta \lambda^4}. \quad (1)$$

² J. Baumann und H. Beer: Sobre el cálculo de placas mediante Polinomios. (Über die Berechnung von Platten mit Polynomen.) Rev. Técnica Tucumán 1, Nr. 2, 204—223 (1951).

³ P. P. Bijlaard: Approximative method of analysis for rectangular reinforced concrete plates under uniformly distributed or hydrostatic load. Vorbericht des 3. Kongresses der J. V. B. H. Liège, 1948.

Wir zeigen später, daß die Rostwirkung für die X-Balken damit ausreichend genau wiedergegeben wird, während wir für q_{ym}' den richtigen Wert durch die genaue Erfüllung der Gleichheit der Mittendurchbiegungen erhalten werden. Der Wert

$$^{(0)}q_{ym}' = q \frac{1}{1 + \beta \lambda^2},$$

welcher sich aus der Lastabtragungsbedingung $q_x' + q_y' = q$ ergibt, bedarf daher einer — wenn auch in der Regel kleinen — Verbesserung.

Für die isotrope Platte $\beta = 1$ erhalten wir die Formel von Marcus⁴. Es besteht jedoch ein grundlegender Unterschied zwischen beiden Verfahren, da Marcus q_{xm}' bzw. q_{ym}' gleichmäßig verteilt annimmt, während wir hier die in Abb. 2 schraffierte Verteilung zugrunde legen.

Das Biegemoment in der Mitte des X-Balkens läßt sich aus dem Belastungsdiagramm ermitteln. Für den Sonderfall der Gleichlast q und Verwendung des dimensionslosen Belastungswertes $\bar{q}_{xm} = \frac{q_{xm}}{q}$ erhalten wir

$$M_{xm}' = \frac{q l_x^2}{48} (1 + 5 \bar{q}_{xm}'), \quad (2)$$

während M_{ym}' später ermittelt wird.

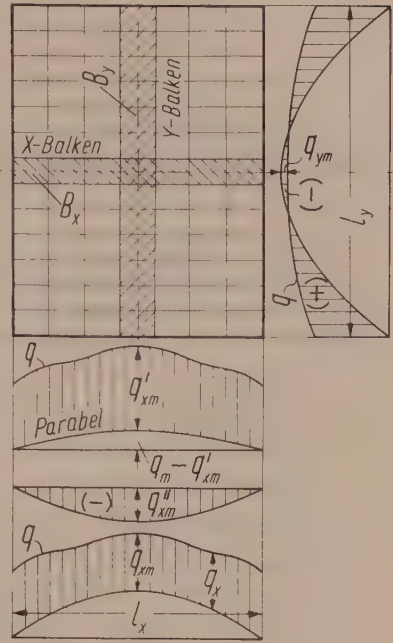


Abb. 2. Belastungen der Ersatzbalken für symmetrische Vollast.

b) Drillwirkung.

Bezeichnen wir mit $2C$ die Drillsteifigkeit der orthotropen Platte, so gilt für die Schnittkräfte unter der Annahme $\nu = 0$:

$$M_x = -B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_y = -B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{xy} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Für die kreuzweis bewehrte Platte ist $2C = \sqrt{B_x B_y}$.

Die Drillmomente der Y-Balken verbiegen die X-Balken. Da sie an den vorderen und rückwärtigen Seiten der X-Balken entgegengesetzt gerichtet sind, kommt für diese Biegung nur ihre Änderung $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ zur Wirkung (Abb. 3). In den X-Balken von der Breite $dy = 1$ entstehen somit die Biegemomente:

$$M_x'' = 2C \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} dx = 2C \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2C}{B_y} M_y. \quad (3)$$

Hierbei ist M_y das Gesamtmoment in der Y-Richtung der Platte. Im X-Balken wirkt somit das Biegemoment:

$$M_x = M_x' + M_x''. \quad (4)$$

Zur Ermittlung von M_x'' setzen wir: $\frac{M_{xm}}{M_{ym}} = \beta \lambda^2$. Es ist dies ein Näherungswert, der sich auch aus der Berechnung der Platte nach der Elastizitätstheorie unter Zugrundelegung eines Polynoms $w = c_{11} X_1 Y_1$ ergibt. Diese Näherung wird jedoch nur für die Ermittlung der Drillwirkung im X-Balken eingesetzt. Die Genauigkeit ist hierbei praktisch ausreichend. Mit $c_x = \frac{2C}{B_x}$ wird dann

$$M_{xm} = M_{xm}' \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + c_x} \quad (5)$$

⁴ H. Marcus: Theorie elastischer Gewebe, Bd. I/2. Berlin: Springer-Verlag. 1932.

⁵ Es läßt sich leicht zeigen, daß die Integrationskonstante verschwindet.

und für den Sonderfall der Gleichlast:

$$M_{xm} = \frac{q l_x^2}{48} \left(1 + 5 \frac{\beta \lambda^4}{1 + \beta \lambda^4} \right) \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + c_x}. \quad (6)$$

Gl. (6) stimmt nur für die quadratische, isotrope Platte mit der Näherungsformel von Marcus überein. Man erhält dann den genauen Wert:

$$M_{xm} = M_{ym} = \frac{7}{192} q l_x^2.$$

Um die Zustandslinie der Biegemomente in der Platte längs der X-Achse zu finden, müssen wir ein Verteilungsgesetz für den Lastanteil q_x'' , welcher das Biegemoment M_x'' erzeugt, annehmen (Drillwirkung). Auch hierfür ist eine Parabel ausreichend genau, so daß die Lastordinate in der Mitte wird:

$$\bar{q}_{xm}'' = \frac{48 M_{xm}''}{5 q l_x^2} = - \frac{48 M_{xm}}{5 q l_x^2} \cdot \frac{c_x}{\lambda^2}. \quad (7)$$

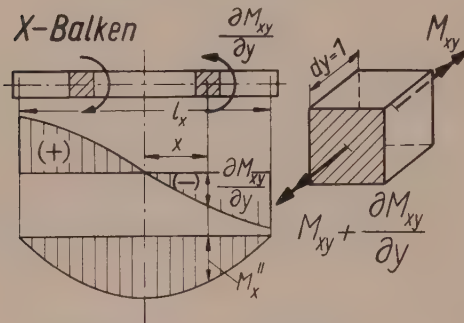


Abb. 3. Wirkung der Drillmomente auf den X-Balken.

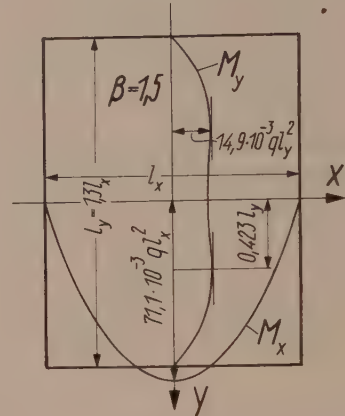


Abb. 4. Zustandslinie der Biegemomente in den Mittelschnitten bei Vollast.

Die gesuchte Ersatzlast $q_x = q_x' + q_x''$ für den X-Balken ist in Abb. 2 eingetragen. Für Gleichlast erhalten wir:

$$\bar{q}_{xm} = 1 - \frac{c_x}{\lambda^2 + c_x} \cdot \frac{\beta \lambda^4}{1 + \beta \lambda^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{c_x}{\lambda^2 + c_x} \quad (8)$$

und mit $\xi = \frac{2x}{l_x}$ die Momentenverteilung:

$$M_x = \frac{q l_x^2}{48} [1 + 5 \bar{q}_{xm} - 6 \bar{q}_{xm} \xi^2 - (1 - \bar{q}_{xm}) \xi^4]. \quad (9)$$

Die Abweichung der mit Formel (9) gerechneten Biegemomente von den genauen Werten beträgt höchstens 3%.

Der Lastanteil q_y , welcher von den längeren Y-Balken abgetragen wird, kann nun direkt aus der Gleichsetzung der Durchbiegungen $f_{xm} = f_{ym}$ ermittelt werden. Wieder wird für Gleichlast:

$$f_{xm} = \frac{q l_x^4}{5760 B_x} (14 + 61 \bar{q}_{xm}), \quad f_{ym} = \frac{q l_y^4}{5760 B_y} (14 + 61 \bar{q}_{ym})$$

und der gesuchte Lastanteil in Balkenmitte

$$\bar{q}_{ym} = \bar{q}_{xm} \cdot \frac{1}{\lambda^4 \beta} + \frac{14}{61} \left(\frac{1}{\lambda^4 \beta} - 1 \right). \quad (10)$$

Die Gleichung des Biegemomentes lautet mit $\eta = \frac{2y}{l_y}$:

$$M_y = \frac{q l_y^2}{48} [1 + 5 \bar{q}_{ym} - 6 \bar{q}_{ym} \eta^2 - (1 - \bar{q}_{ym}) \eta^4]. \quad (11)$$

Für negatives \bar{q}_{ym} tritt ein zweiter Extremwert (Maximum) im Abstand $\eta = \sqrt{\frac{3 \bar{q}_{ym}}{1 - \bar{q}_{ym}}}$

auf, wobei \bar{q}_{ym} in die Wurzel positiv einzusetzen ist. In Abb. 4 sind die dem Fall $\lambda = 1.3$ und $\beta = 1.5$ zugehörigen Diagramme eingetragen.

Für Platten, welche die Lasten vorwiegend nach der X-Richtung abtragen ($\beta \lambda^2 > 4$), empfiehlt es sich, das Verteilungsgesetz von q_y etwas zu ändern, in die Parabel ein gerades Zwischenstück von der Länge $l_y - 1.5 l_x$ einzuschalten¹ und f_{ym} bzw. M_y mit dieser Lastverteilung zu rechnen.

III. Unsymmetrische Lastfälle.

Wir behandeln als Beispiel eine Dreieckslast in der X-Richtung (Flüssigkeitsdruck) und bezeichnen die Lastordinate am rechten Plattenrand (Abb. 5) mit $2q$. Für den Lastanteil q_{xm}' gilt dann Formel (1). Für $q - q_{xm}'$ können wir wieder eine quadratische Parabel annehmen, denn Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß die Annahme einer kubischen Parabel (gestrichelt), welche die Unsymmetrie in der Last berücksichtigt, die Momentenverteilung nicht wesentlich beeinflußt. Das Biegemoment in der Balkenmitte ist in beiden Fällen gleich groß, während der Maximalwert bei Annahme einer symmetrischen Parabel nur wenig größer ist. Es ergeben sich dann wieder die Formeln (8) und (10) für q_{xm} und q_{ym} , während die Biegemomente in den Achsenschnitten nun sind:

$$M_x = \frac{q l_x^2}{48} [(5 \bar{q}_{xm} - 2) - \xi + 3(1 - 2 \bar{q}_{xm}) \xi^2 + \xi^3 - (1 - \bar{q}_{xm}) \xi^4], \quad (12)$$

$$M_y \dots [\text{nach Formel (11)}].$$

Will man noch die Durchbiegungen ermitteln, so ist dies, da die Lastverteilungen q_x und q_y der Balken festliegen, eine einfache baustatische Aufgabe. Wir erhalten in der X-Achse:

$$[w]_{y=0} = \frac{q l_x^2}{11520 B_x} [75 - 7 \xi - 90 \xi^2 + 10 \xi^3 + 15 \xi^4 - 3 \xi^5 - 2(1 - \bar{q}_{xm})(61 - 15 \xi^2 + 14 \xi^4 - \xi^6)].$$

Will man genauer mit einer kubischen Parabel für die Rost- und Drillwirkung rechnen, so wird die Lastverteilung:

$$q_x = q(1 + \xi) - q_{xm} \cdot \frac{1}{3}(3 - \xi - 3 \xi^2 + \xi^3).$$

IV. Teilbelastung.

Wir untersuchen den Fall einer Flächenlast mit den Belastungslängen $\alpha_x l_x$ und $\alpha_y l_y$. Aus dem Durchbiegungsvergleich der Balken und bei vollständiger Lastabtragung wird mit der dimensionslosen Abkürzung

$$\kappa_x = \beta \frac{\alpha_y (8 - 4 \alpha_y^2 + \alpha_y^3)}{\alpha_x (8 - 4 \alpha_x^2 + \alpha_x^3)},$$

die Mittelordinate der Last infolge Rostwirkung:

$$\bar{p}_{xm}' = \frac{\kappa_x \lambda^4}{1 + \kappa_x \lambda^4}. \quad (13)$$

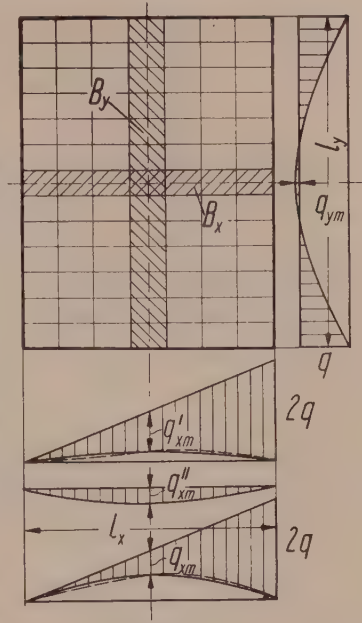


Abb. 5. Belastung der Ersatzbalken für die Platte unter Dreieckslast.

Wir behalten zunächst die parabolische Verteilung von $p - p_x'$ über den X -Balken bei (Abb. 6) und berechnen:

$$M_{xm}' = \frac{p l_x^2}{8} [\alpha_x (2 - \alpha_x) - \frac{5}{6} (1 - \bar{p}_{xm}')] \quad (14)$$

Für das Verhältnis der Biegemomente führen wir für die Streckenlast

$$\frac{M_x}{M_y} = \lambda^2 \cdot \kappa_x \frac{\alpha_x (2 - \alpha_x)}{\alpha_y (2 - \alpha_y)} = \lambda^2 \gamma \quad (15)$$

in die Gleichung $M_x = M_x' - \frac{2C}{B_y} M_y$ ein und erhalten mit $\bar{c}_y = \frac{2C}{\gamma B_y} = \frac{c_y}{\gamma}$ das gesuchte Biegemoment in Plattenmitte für $\alpha_x = \alpha_y \geq 0.5$:

$$M_{xm} = \frac{p l_x^2}{8} [\alpha_x (2 - \alpha_x) - \frac{5}{6} (1 - \bar{p}_{xm}')] \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \bar{c}_y} \quad (16)$$

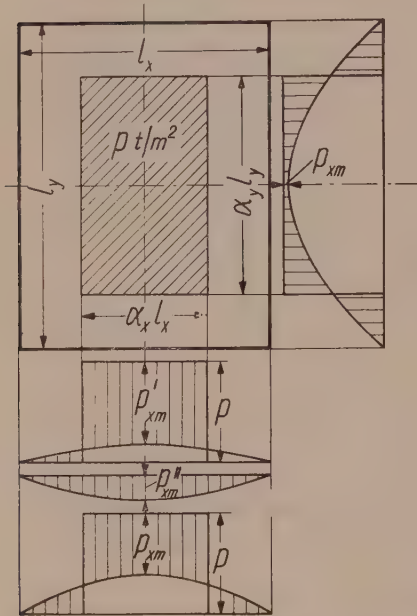


Abb. 6. Belastung der Ersatzbalken für Teilbelastung.

Für den Sonderfall der quadratischen, isotropen Platte ist $\bar{p}_{xm}' = 0.5$ und $\lambda = \bar{c}_y = 1$. Man erhält für $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$ nach (16)

$$M_{xm} = \frac{p l^2}{48}.$$

Dieser Wert weicht nur wenig von dem nach der Elastizitätstheorie berechneten ab (0.0209 gegen 0.0220). Für $\alpha = 1$ (Vollast) erhält man aus (16) die unter II b abgeleitete Formel (6).

Infolge der Drillwirkung wird der Lastanteil

$$\bar{p}_{xm}'' = - \frac{48 M_{xm}}{5 p l_x^2} \cdot \frac{\bar{c}_y}{\lambda^2} \quad (17)$$

abgetragen, so daß sich mit $\bar{p}_{xm} = \bar{p}_{xm}' + \bar{p}_{xm}''$ folgende Verteilungen für das Biegemoment des X -Balkens ergeben (Abb. 6):

$$x \geq \frac{\alpha_x l_x}{2} : \quad M_x = \frac{p l_x^2}{8} [2 \alpha_x (1 - \xi) - \frac{1}{6} (1 - \bar{p}_{xm}) (5 - 6 \xi^2 + \xi^4)], \quad (18)$$

$$x \leq \frac{\alpha_x l_x}{2} :$$

$$M_x = \frac{p l_x^2}{8} [2 \alpha_x (1 - \xi) - (\alpha_x^2 - \xi^2) - \frac{1}{6} (1 - \bar{p}_{xm}) (5 - 6 \xi^2 + \xi^4)]. \quad (19)$$

Der Durchbiegungsvergleich ergibt den Lastanteil des Y -Balkens

$$\bar{p}_{ym} = \frac{1}{61} \left\{ \frac{1}{\beta \lambda^4} [15 \alpha_x (8 - 4 \alpha_x^2 + \alpha_x^3) - 61 (1 - \bar{p}_{xm})] - 15 \alpha_y (8 - 4 \alpha_y^2 + \alpha_y^3) + 61 \right\} \quad (20)$$

und die Verteilung:

$$y \geq \frac{\alpha_y l_y}{2}:$$

$$M_y = \frac{p l_y^2}{8} [2 \alpha_y (1 - \eta) - \frac{1}{6} (1 - \bar{p}_{ym}) (5 - 6 \eta^2 + \eta^4)] \quad (21)$$

$$y \leq \frac{\alpha_y l_y}{2}:$$

$$M_y = \frac{p l_y^2}{8} [2 \alpha_y (1 - \eta) - (\alpha_y^2 - \eta^2) - \frac{1}{6} (1 - \bar{p}_{ym}) (5 - 6 \eta^2 + \eta^4)]. \quad (22)$$

Für konzentrierte Flächenlasten ($\alpha < \frac{1}{2}$) ergibt Formel (13) zu niedrige Werte für p_{xm}' , da die Lastabtragung durch die Y -Balken $p - p_x'$ auf die ganze Länge l_x erfolgt, während die Last p nur auf die Länge $\alpha_x l_x$ wirkt. Wir können dies dadurch berücksichtigen, daß wir mit einer Lastordinate $\mu (p - p_{xm}')$ rechnen und μ zwischen den Grenzwerten 1 (für $\alpha_x = \frac{1}{2}$) und 0.5 ($\alpha_x = \frac{1}{4}$) geradlinig einschalten. Noch stärkere Lastkonzentrationen haben auf den Verlauf der Biegemomente außerhalb der Last keinen nennenswerten Einfluß, während der kleine Lastbereich leicht erfaßt werden kann. Für die quadratische Platte und $\mu = 0.5$ erhält man für $\alpha = \frac{1}{4}$ und $P = (\alpha l)^2 \cdot p$ nach (16) den Wert $M_{xm} = 0.23 P$, der gut mit Berechnungen nach der Elastizitätstheorie übereinstimmt.

V. Schlußbetrachtung.

Es war die Absicht des Verfassers zu zeigen, daß die Aufteilung der Lasteinwirkung in orthotropen Rechteckplatten in „Rostwirkung“ und „Drillwirkung“ die Rückführung der Plattenberechnung auf jene von Trägern ermöglicht. Einzelne hier gebrachte Beispiele und weitere vom Verfasser durchgeführte Vergleichsrechnungen haben bewiesen, daß es praktisch ausreicht, für die fiktiven Lasten, welche diesen beiden Wirkungen entsprechen, plausible Verteilungsgesetze anzunehmen, sofern sie die Verträglichkeitsbedingung in einem ausgezeichneten Punkt der Platte und die Bedingung der Lastabtragung erfüllen. Wie auch die durchgeführten theoretischen Betrachtungen zeigen, ist dieses Verfahren der direkten Ermittlung der Momente aus den Lasten durch zweifache Integration (Mittelwertbildung) in hohem Maße fehlereliminierend, während die Verfahren der Elastizitätstheorie, welche die Momente aus der Biegefläche durch zweifache Differentiation ermitteln, fehlerverschärfend sind.

Die beschriebene Methode ist grundsätzlich verschieden vom Näherungsverfahren von Marcus, das keine Lastverteilung annimmt und den Einfluß der Drillmomente empirisch berücksichtigt. Lediglich für die quadratische isotrope Platte unter Gleichlast gehen beide Verfahren ineinander über. Nach Marcus erhält man jedoch stets nur Maximalwerte, während hier auch die Zustandslinien der Momente in einzelnen Schnitten und die Durchbiegungen ermittelt werden können.

In dieser Arbeit wurde, um die Rechnung für die Praxis einfach zu gestalten, auf eine dort nicht erforderliche Genauigkeit verzichtet. Es steht jedoch nichts im Wege, das Verfahren zu verfeinern, indem man weitere Bedingungen für die Lastabtragung aufstellt und in mehreren ausgezeichneten Punkten die Durchbiegungsgleichheit herstellt. Die Methode wurde hier nur auf die orthotrope Platte angewendet. Natürlich kann man mit ihr auch den Plattenrost und den drillsteifen Rost mit vielen Rippen behandeln, wenn man seine Drillsteifigkeit entsprechend einführt.

Die Behandlung der elastisch nachgiebig eingespannten Platte erfordert noch einige zusätzliche Überlegungen, auf die der Verfasser an anderer Stelle zurückkommen wird.

(Eingegangen am 5. April 1955.)

Zur Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf die Ermittlung von Gleichgewichtslagen.

Von H. Egger, Graz.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Zur Berechnung von Gleichgewichtslagen in der Statik starrer Körper verwendet man mit Vorteil das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Mit Hilfe dieses Prinzips werden im folgenden einfache Formeln abgeleitet, deren Anwendung auch in schwierigeren Fällen sofort die Gleichgewichtsgleichungen liefert, wobei nur die Kenntnis einiger Winkel nötig ist.

Summary. For computing equilibrium positions in the statics of rigid bodies the principle of virtual displacements may be favourably used. By means of this principle simple formulae are derived from which the equilibrium equations at once follow even in more difficult cases if only certain angles are known.

Résumé. Pour calculer des positions d'équilibre dans la statique de corps rigides, l'on a intérêt à appliquer le principe des déplacements virtuels. L'on déduit ci-dessous, à l'aide de ce principe, des formules simples dont l'application donne immédiatement — même dans des cas difficiles — les équations d'équilibre. Il n'est besoin pour cela que de la connaissance de quelques angles.

Zur Auffindung von Gleichgewichtslagen starrer Körper verwendet man oft mit Vorteil das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Erfahrungsgemäß scheut man sich jedoch, das genannte Prinzip zu verwenden, wenn an den Berührungsstellen der Körper Reibungskräfte auftreten. Im folgenden wird gezeigt, daß auch in solchen Fällen das Prinzip in einfacher Weise zum Ziele führt.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen besagt bekanntlich, daß für ein im Gleichgewicht befindliches System von Körpern die bei einer gedachten Verschiebung geleistete Arbeit aller äußeren Kräfte Null ist, also

$$\sum \delta A = \sum \mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{s} = 0.$$

Es ist für die Anschauung vorteilhafter, wenn man statt der Verschiebungen der Körperpunkte entsprechende Geschwindigkeiten nimmt, womit das Prinzip in der Form

$$\sum_k \mathfrak{P}_k \cdot \mathfrak{v}_k = 0$$

erscheint, worin unter \mathfrak{P}_i alle äußeren Kräfte zu verstehen sind, die bei der vorgenommenen Verschiebung Arbeit leisten.

Für einen Körper oder für ein System von Körpern, welche der Einwirkung eines ebenen Kraftsystems unterliegen, läßt sich für $\sum \mathfrak{P}_k \cdot \mathfrak{v}_k$ ein einfacher Ausdruck ableiten, der im folgenden gegeben wird.

Ein Geschwindigkeitszustand in der Ebene ist bestimmt durch Angabe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1 = v_1 \mathfrak{e}_1$ eines Scheibpunktes A_1 und der Richtung \mathfrak{e}_2 der Geschwindigkeit eines zweiten Punktes A_2 (Abb. 1).

Es gilt die Beziehung

$$\mathfrak{v}_2 = v_2 \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{v}_1 + \omega \mathfrak{a}_1^\perp, \quad (1)$$

worin ω die Winkelgeschwindigkeit der ebenen Bewegung und $\mathfrak{a}_1^\perp = \mathfrak{f} \times \mathfrak{a}_1$ der auf dem Vektor \mathfrak{a}_1 im Sinne einer Rechtsschraube senkrecht stehende Vektor ist (\mathfrak{f} ist der Einheitsvektor senkrecht zur Ebene).

Es gilt

$$\mathfrak{a}^{\perp\perp} = -\mathfrak{a}; \quad \mathfrak{a}^\perp \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{f} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{f}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -(\mathfrak{f}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = -\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^\perp.$$

Nach skalarer Multiplikation der Gl. (1) mit e_2^L folgt

$$0 = v_1 e_1 \cdot e_2^L + a_1 \cdot e_2 \omega,$$

woraus

$$\omega = -v_1 \frac{e_1 \cdot e_2^L}{a_1 \cdot e_2} = v_1 \frac{e_1^L \cdot e_2}{a_1 \cdot e_2} = \frac{v_1}{p_1}.$$

Für einen weiteren beliebigen Körperpunkt B gilt dann

$$v_B = v_1 + \omega b^L = v_1 \left(e_1 + \frac{b^L}{p_1} \right) \quad (2)$$

mit $b = \overrightarrow{A_1 B}$.

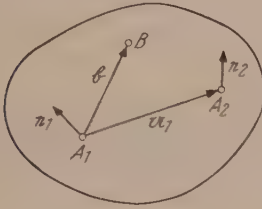


Abb. 1.

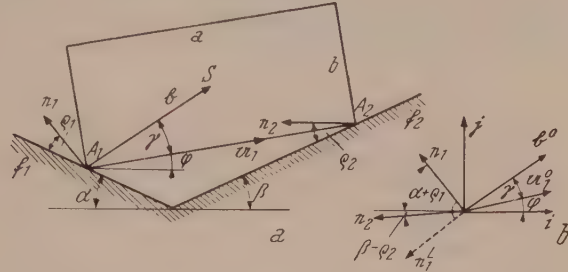


Abb. 2.

Für alle Kräfte \mathfrak{P}_k , die in den einzelnen Punkten B_k angreifen und bei der vorge-
nommenen Verschiebung Arbeit leisten, gilt $\sum_k \mathfrak{P}_k \cdot v_k = 0$ oder mit Gl. (2)

$$e_1 \cdot \mathfrak{R} + \frac{1}{p_1} \sum_k \mathfrak{P}_k \cdot b_k^L = 0, \quad (I)$$

worin $p_1 = \frac{a_1 \cdot e_2}{e_1^L \cdot e_2}$ und \mathfrak{R} die vektorielle Summe der Kräfte \mathfrak{P}_k ist. Die Anwendung
der Gl. (I) erfordert nur die Kenntnis der Winkel der einzelnen Vektoren gegen-
einander.

Beispiel: Eine homogene rechteckige Platte vom Gewichte G stütze sich in
den Ecken A_1, A_2 an zwei unter α und β gegen die Waagrechte geneigten
Ebenen (Reibungsziffer f_1 und f_2). Man bestimme für die Gleichgewichtsgrenze den
Winkel φ (Abb. 2).

Wählt man die Verschiebungsrichtungen e_1 und e_2 so, daß sie gegen die schiefen
Ebenen unter den Reibungswinkeln ϱ_1 bzw. ϱ_2 geneigt sind, wobei $f_1 = \tan \varrho_1$,
 $f_2 = \tan \varrho_2$, so leisten die Auflagerdrücke \mathfrak{B}_1 in A_1 und \mathfrak{B}_2 in A_2 bei dieser Verschiebung
keine Arbeit und Formel (I) ergibt

$$e_1 \cdot \mathfrak{G} + \frac{1}{p_1} \mathfrak{G} \cdot b^L = 0,$$

oder

$$p_1 e_1 \cdot j + b^L \cdot j = 0. \quad (3)$$

Für p_1 erhält man nach Ansicht der Abb. 2b

$$p_1 = a \frac{\cos (180 - \beta + \varrho_2 + \varphi)}{\cos (90 - \beta + \varrho_2 - \alpha - \varrho_1)} = -a \frac{\cos (\varphi - \beta + \varrho_2)}{\sin (\alpha + \beta + \varrho_1 - \varrho_2)}$$

und aus (3), da $j \cdot b^L = -j^L \cdot b = i \cdot b$:

$$a \frac{\cos (\varphi - \beta + \varrho_2)}{\sin (\alpha + \beta + \varrho_1 - \varrho_2)} \sin (\alpha + \varrho_1) = \frac{d}{2} \cos (\varphi + \gamma),$$

worin $d^2 = a^2 + b^2$ und $\tan \gamma = \frac{b}{a}$.

Für $\operatorname{tg} \varphi$ ergibt sich daraus nach einfacher Rechnung

$$\operatorname{tg} \varphi \left[\frac{\sin(\alpha + \varrho_1) \sin(\beta - \varrho_2)}{\sin(\alpha + \beta + \varrho_1 - \varrho_2)} + \frac{b}{2a} \right] = \frac{1}{2} - \frac{\sin(\alpha + \varrho_1) \cos(\beta - \varrho_2)}{\sin(\alpha + \beta + \varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Nach Änderung der Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 ist die zweite Grenzlage festgelegt.

Für $a = b$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{2 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \cdot 1$$

Handelt es sich um den Gleichgewichtszustand mehrerer gelenkig verbundener Körper, die einem ebenen Kraftsystem unterliegen, so läßt sich auch hierfür ein einfacher Ausdruck ableiten.

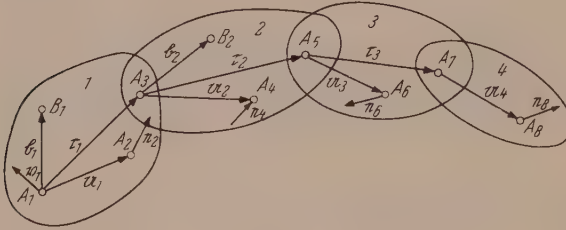


Abb. 3.

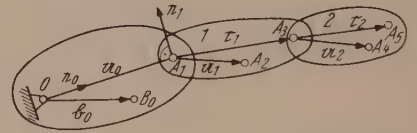


Abb. 4.

Es seien die Geschwindigkeit $v_1 = v_1 e_1$ des Punktes A_1 der Scheibe 1 sowie die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte $A_2, A_4, A_6 \dots$ vorgegeben (Abb. 3).

Aus

$$v_2 = v_1 + \omega_1 a_1^L$$

ergibt sich wie vorhin $\omega_1 = \frac{v_1}{p_1}$ mit $p_1 = \frac{a_1 \cdot e_2}{e_1^L \cdot e_2}$.

Die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes A_3 der Scheibe 1 ist dann

$$v_3 = v_1 \left(e_1 + \frac{c_1^L}{p_1} \right) \quad (4)$$

und die Geschwindigkeit irgendeines Punktes der Scheibe 1

$$v_{B1} = v_1 \left(e_1 + \frac{b_1^L}{p_1} \right).$$

Für die Geschwindigkeit v_4 des Punktes A_4 der Scheibe 2 gilt

$$v_4 e_4 = v_3 + \omega_2 a_2^L,$$

woraus nach skalarer Multiplikation mit e_4^L folgt

$$0 = v_3 \cdot e_4^L + \omega_2 a_2 \cdot e_4,$$

oder mit Gl. (4)

$$0 = v_1 \left(e_1 \cdot e_4^L + \frac{c_1 \cdot e_4}{p_1} \right) + \omega_2 a_2 \cdot e_4.$$

Danach ist

$$\omega_2 = \frac{v_1}{p_2} \quad \text{mit} \quad p_2 = \frac{a_2 \cdot e_4}{\left(e_1^L - \frac{c_1}{p_1} \right) \cdot e_4}.$$

Mit diesem ω_2 berechnen sich

$$v_5 = v_1 \left(e_1 + \frac{c_1^L}{p_1} + \frac{c_2^L}{p_2} \right),$$

$$v_{B2} = v_1 \left(e_1 + \frac{c_1^L}{p_1} + \frac{b_2^L}{p_2} \right).$$

¹ Siehe K. Federhofer: Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. I. Teil: Statik, Aufgabe I/17. Wien: Springer-Verlag. 1950.

Formel (II) gibt hier, wenn e_1 und e_6 entsprechend gewählt werden:

$$e_1 \cdot (\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) + \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{C}_1^L + \mathfrak{G}_3 \cdot \mathfrak{C}_2^L + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{p_i} \mathfrak{G}_i \cdot \mathfrak{h}_i^L = 0,$$

oder mit $\mathfrak{G}_i = -j G_i$ und $\gamma_\nu = \frac{G_\nu}{G_1}$:

$$(1 + \gamma_2 + \gamma_3) i \cdot e_1 + \gamma_2 i \cdot \mathfrak{C}_1 + \gamma_3 i \cdot \mathfrak{C}_2 + \frac{1}{p_1} i \cdot \mathfrak{h}_1 + \frac{\gamma_2}{p_2} i \cdot \mathfrak{h}_2 + \frac{\gamma_3}{p_3} i \cdot \mathfrak{h}_3 = 0. \quad (6)$$

Es werden mit $a = \overline{A_1 A_2}$ und $b = \overline{A_5 A_6}$:

$$p_1 = a \frac{n_1 \cdot e_2}{e_1^L \cdot e_2}, \quad \mathfrak{C}_1 = a \frac{n_1}{p_1}, \quad p_2 = l_2 \frac{n_2 \cdot e_4}{(e_1^L - \mathfrak{C}_1) \cdot e_4}, \quad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 + l_2 \frac{n_2}{p_2},$$

$$p_3 = b \frac{n_3 \cdot e_6}{(e_1^L - \mathfrak{C}_2) \cdot e_6}.$$

Aus Gl. (6) wird nun

$$- (1 + \gamma_2 + \gamma_3) \sin(\varphi_1 - \varrho) + \gamma_2 \frac{a}{p_1} \cos \varphi_1 + \gamma_3 \left(\frac{a}{p_1} \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{p_2} \cos \varphi_2 \right) -$$

$$- \frac{1}{p_1} \left(\frac{l_1}{2} - a \right) \cos \varphi_1 + \gamma_2 \frac{l_2}{2 p_2} \cos \varphi_2 + \gamma_3 \frac{l_3}{2 p_3} \cos \varphi_3 = 0,$$

oder

$$(1 + \gamma_2 + \gamma_3) \left[\frac{a}{p_1} \cos \varphi_1 - \sin(\varphi_1 - \varrho) \right] - \frac{l_1}{2 p_1} \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{p_2} \left(\gamma_3 + \frac{\gamma_2}{2} \right) \cos \varphi_2 +$$

$$+ \frac{l_3}{2 p_3} \gamma_3 \cos \varphi_3 = 0. \quad (7)$$

e_2 und e_4 können noch geeignet gewählt werden.

Nimmt man a) $e_2 = e_1$ und $e_4 = e_1$, dann werden

$$p_1 = \infty, \quad p_2 = \infty, \quad \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = 0, \quad p_3 = b \frac{\cos \varrho}{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}$$

und Gl. (7) ergibt:

$$- (1 + \gamma_2 + \gamma_3) \sin(\varphi_1 - \varrho) + \gamma_3 \frac{l_3}{2 b} \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}{\cos \varrho} \cos \varphi_3 = 0. \quad (a)$$

Wählt man b) $e_2 = e_1$ und $e_4 = e_6$, dann ergibt sich

$$p_1 = \infty, \quad \mathfrak{C}_1 = 0, \quad p_2 = l_2 \frac{n_2 \cdot e_6}{e_1^L \cdot e_6} = l_2 \frac{\cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varrho)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}, \quad p_3 = \infty,$$

und aus Gl. (7) folgt

$$- (1 + \gamma_2 + \gamma_3) \sin(\varphi_1 - \varrho) + \left(\frac{\gamma_2}{2} + \gamma_3 \right) \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}{\cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varrho)} \cos \varphi_2 = 0. \quad (b)$$

Wählt man schließlich c) $e_2 = e_4 = e_6$, dann werden

$$p_2 = p_3 = \infty, \quad p_1 = a \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_3 - \varrho)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}$$

und man erhält

$$- (1 + \gamma_2 + \gamma_3) \sin(\varphi_1 - \varrho) + \left(1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \frac{l_1}{2 a} \right) \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2 \varrho)}{\cos(\varphi_1 + \varphi_3 - \varrho)} \cos \varphi_1 = 0. \quad (c)$$

Zu den Gl. (a) bis (c) treten noch die geometrischen Beziehungen

$$a \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = b \sin \varphi_3,$$

$$a \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + b \cos \varphi_3 = B.$$

2. Zwei hohle Halbzylinder von den Gewichten Q_1 und Q_2 , die gelenkig verbunden sind, stützen sich auf eine raue Ebene. Ein schwerer Stab vom Gewichte G ist an einem Ende an einem fixen Drehpunkt befestigt, am anderen Ende mit dem ersten

Zylinder gelenkig verbunden. Die Schwerpunkte aller drei Körper befinden sich in einer lotrechten Ebene.

Man finde die Gleichgewichtsgrenzlage (Abb. 6).

Formel (II) ergibt, da der Stab eine reine Drehung um 0 ausführt, mit den Bezeichnungen der Abb. 6:

$$\mathfrak{G} \cdot e_0^L \frac{l}{2l} + e_0^L \cdot (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) + \mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{G}_1^L + \frac{1}{p_1} \mathfrak{D}_1 \cdot q_1^L + \frac{1}{p_2} \mathfrak{D}_2 \cdot b_2^L = 0$$

oder mit $\frac{Q_i}{G} = \gamma_i$:

$$i \cdot e_0 \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 \right) + i \cdot \mathfrak{G}_1 \gamma_2 + \frac{\gamma_1}{p_1} i \cdot b_1 + \frac{\gamma_2}{p_2} i \cdot b_2 = 0. \quad (8)$$

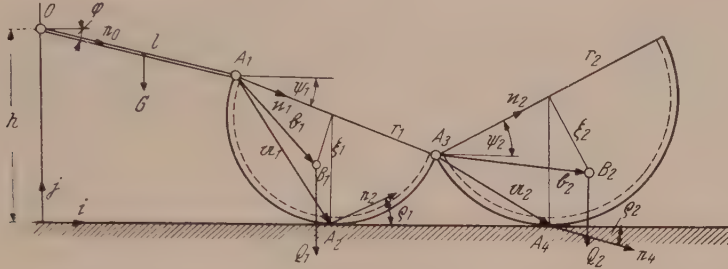


Abb. 6.

Mit den gegebenen Größen r_1, r_2, ξ_1, ξ_2 werden

$$b_1 = r_1 n_1 - \xi_1 n_1^L, \quad a_1 = r_1 n_1 - j r_1,$$

$$b_2 = r_2 n_2 - \xi_2 n_2^L, \quad a_2 = r_2 n_2 - j r_2$$

und damit aus (8):

$$\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 \right) \cos \varphi + \gamma_2 i \cdot \mathfrak{G}_1 + \frac{\gamma_1}{p_1} (r_1 \cos \psi_1 - \xi_1 \sin \psi_1) + \frac{\gamma_2}{p_2} (r_2 \cos \psi_2 + \xi_2 \sin \psi_2) = 0. \quad (9)$$

Weiters ergibt sich

$$p_1 = - \frac{a_1 \cdot e_2}{e_0 \cdot e_2} = - r_1 \frac{(n_1 - j) \cdot e_2}{e_0 \cdot e_2} = - r_1 \frac{\cos(\psi_1 + \varrho_1) - \sin \varrho_1}{\cos(\varphi + \varrho_1)},$$

$$\mathfrak{G}_1 = 2 r_1 \frac{n_1}{p_1}, \quad p_2 = \frac{a_2 \cdot e_4}{(-e_0 - \mathfrak{G}_1) \cdot e_4} = - r_2 \frac{(n_2 - j) \cdot e_4}{(e_0 + \mathfrak{G}_1) \cdot e_4} =$$

$$= - r_2 \frac{\cos(\psi_2 + \varrho_2) + \sin \varrho_2}{\cos(\varphi - \varrho_2) + \frac{2 r_1}{p_1} \cos(\psi_1 - \varrho_2)}$$

und aus (9) erhält man damit, wenn $\frac{\xi_1}{r_1} = \lambda_1, \frac{\xi_2}{r_2} = \lambda_2$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{1}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 \right) \cos \varphi - \frac{\cos(\varphi + \varrho_1)}{\cos(\psi_1 + \varrho_1) - \sin \varrho_1} [(\gamma_1 + 2 \gamma_2) \cos \psi_1 - \gamma_1 \lambda_1 \sin \psi_1 - 2 \gamma_2 \Gamma \cos(\psi_1 - \varrho_2)] - \gamma_2 \Gamma \cos(\varphi - \varrho_2) = 0,$$

worin

$$\Gamma = \frac{\cos \psi_2 + \lambda_2 \sin \psi_2}{\cos(\psi_2 + \varrho_2) + \sin \varrho_2}.$$

Dazu treten noch die Beziehungen:

$$h = l \sin \varphi + r_1 (1 + \sin \psi_1),$$

$$r_1 (1 - \sin \psi_1) = r_2 (1 - \sin \psi_2).$$

Schließlich sei noch für eine mögliche Verschiebung eines starren Körpers im Raume ein Beispiel gegeben.

Der Geschwindigkeitszustand der räumlichen Bewegung ist z. B. eindeutig festgelegt durch Angabe des Geschwindigkeitsvektors eines Punktes, der Richtung der Geschwindigkeit eines zweiten Punktes und eine durch einen dritten Punkt gelegte Ebene, in der dessen Geschwindigkeitsvektor liegen soll².

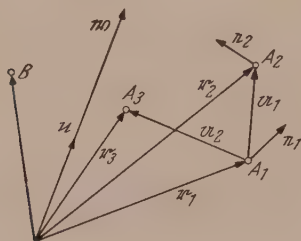


Abb. 7.

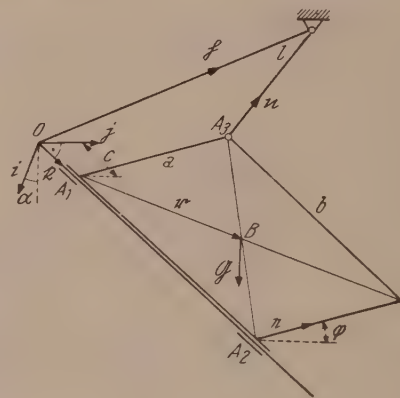


Abb. 8.

Mit w als Winkelgeschwindigkeitsvektor und u als Translationsvektor sind die Geschwindigkeiten v_1, v_2 zweier Punkte A_1, A_2 (Abb. 7) gegeben durch

$$v_1 = w \times r_1 + u, \quad v_2 = w \times r_2 + u.$$

Zwischen v_2 und v_1 besteht demnach die Beziehung

$$v_2 = v_1 + w \times a_1, \quad (10)$$

woraus durch skalare Multiplikation mit a_1 folgt ($v_2 = v_2 e_2$)

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot a_1}{e_2 \cdot a_1}.$$

Für einen dritten Punkt A_3 gilt ebenso

$$v_3 = v_1 + w \times a_2. \quad (11)$$

Als bekannt anzusehen sind $v_1 = v_1 e_1, e_2$ und $v_3 \cdot n = 0$, wenn n der Normalvektor einer Ebene durch A_3 ist. Aus (11) folgt

$$0 = v_1 \cdot n + w \cdot (a_2 \times n).$$

Für den Vektor w gelten also die zwei Gleichungen

$$w \times a_1 = v_2 - v_1 = v_1 \left(e_2 \frac{e_1 \cdot a_1}{e_2 \cdot a_1} - e_1 \right) = v_1 p$$

und

$$w \cdot (n \times a_2) = v_1 e_1 \cdot n.$$

² Siehe K. Federhofer: Räumliche Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Wien: J. Springer, 1928.

Daraus ergibt sich

$$w = v_1 \frac{e_1 \cdot n a_1 + (n \times a_2) \times p}{(n, a_2, a_1)}; \quad [a_1 \cdot p = 0, \quad (n, a_2, a_1) \neq 0].$$

Für einen beliebigen Punkt B des Körpers ist weiters

$$v_B = v_1 + w \times r$$

und die Forderung $\sum_k \mathfrak{P}_k \cdot v_{Bk}$ führt damit zur Gleichung

$$e_1 \cdot \mathfrak{R} + \bar{w} \cdot \sum_k r_k \times \mathfrak{P}_k = 0; \quad (III)$$

darin sind

$$\mathfrak{R} = \sum_k \mathfrak{P}_k, \quad \bar{w} = \frac{e_1 \cdot n a_1 + (n \times a_2) \times p}{(n, a_2, a_1)}, \quad p = e_2 \frac{e_1 \cdot a_1}{e_2 \cdot a_1} - e_1.$$

Beispiel: Eine homogene, rechteckige Platte vom Gewichte G kann in den Hülse A_1, A_2 an einer glatten Stange gleiten, die unter α gegen die Waagrechte geneigt ist und wird in A_3 durch ein Seil von gegebener Länge l gehalten. Man bestimme die Gleichgewichtslage (Abb. 8). Gl. (III) lautet in diesem Falle, wenn $e_1 = e_2 = \mathfrak{f}$ gewählt wird:

$$e_1 \cdot \mathfrak{G} + \bar{w} \cdot (r \times \mathfrak{G}) = 0. \quad (13)$$

Wegen $e_1 = e_2$ wird $p = 0$ und damit

$$\bar{w} = \frac{\mathfrak{f} \cdot n b \mathfrak{f}}{a b (n, e, \mathfrak{f})}.$$

In bezug auf das in Abb. 8 festgelegte Koordinatensystem sind

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} G \cos \alpha \\ 0 \\ G \sin \alpha \end{cases}, \quad e = \begin{cases} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{cases}, \quad n = \begin{cases} \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 \\ \cos \theta_3 \end{cases}$$

und

$$(n, e, \mathfrak{f}) = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta_1 \cos \varphi + \cos \theta_2 \sin \varphi.$$

Mit $r = \frac{b}{2} \mathfrak{f} + \frac{a}{2} e$ wird weiters

$$(\mathfrak{f}, r, \mathfrak{G}) = -\frac{G}{2} a \cos \alpha \cos \varphi$$

und aus Gl. (13) folgt

$$G \sin \alpha - \frac{1}{a} \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_1 \cos \varphi + \cos \theta_2 \sin \varphi} \cdot \frac{G}{2} a \cos \alpha \cos \varphi = 0$$

oder

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \operatorname{tg} \varphi = \cos \theta_3 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}.$$

Zu dieser Gleichung tritt noch die geometrische Beziehung

$$\mathfrak{h} = c \mathfrak{f} + a e + n l$$

und

$$|n| = 1.$$

Diese fünf Gleichungen gestatten die Berechnung von n, φ und c .

(Eingegangen am 10. Mai 1955.)

Die zusätzlichen Momente beim frei aufliegenden Balken infolge der elastischen Verformung.

Von E. Friedrich, Graz.

Mit 14 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Im allgemeinen ist es üblich, bei der Ermittlung der Biegemomente von statisch bestimmten Trägern das unverformte Bauwerk der Berechnung zugrunde zu legen. In vielen Fällen, z. B. bei Bestimmung der Momente des auf Druck und Biegung beanspruchten frei aufliegenden Trägers, haben die zusätzlichen Momente infolge der Verformung des Trägers solche Größen, daß sie nicht mehr vernachlässigt werden können. Im nachfolgenden wird für die Berechnung ein Verfahren gezeigt, das allgemeine Gültigkeit hat und, wie mir scheint, für den Bauingenieur von besonderer Bedeutung ist. Das Verfahren kann in gleicher Weise auch für den Bogen Anwendung finden.

Summary. When determining the bending moments of statically determinate beams, the computing procedure generally starts from the undeformed structure. In many cases however, as for instance when determining the moments of the girder resting freely on its supports, and loaded in compression and bending, the additional moments due to the girder deflection are of such magnitude that they cannot be neglected. In this paper a computing method is given that is of general validity, and seems to be of particular importance for the civil engineer. This method may be equally applied to the arch.

Résumé. Il est en général d'usage, pour déterminer le moment fléchissant de poutres statiquement déterminées de se baser sur la construction non déformée. Dans bien des cas, par exemple lorsque l'on détermine le moment d'une poutre reposant librement sur deux appuis et soumise à des forces de pression et de flexion, les moments supplémentaires dus à la déformation de la poutre sont de telle importance qu'il n'est plus possible de les négliger. Suit l'indication d'une méthode de calcul, applicable à tous les cas, et à ce qu'il me semble, d'importance toute particulière pour l'Ingénieur en Bâtiment. Cette méthode peut également être employée pour l'arc.

I. Die Berechnung der Momente.

Ein Träger nach Abb. 1 hat die Stützweite $2a$, ist frei aufliegend und wird durch die Druckkraft H gedrückt und durch eine senkrechte Last $p(x)$ belastet. Die zusätzlichen Momente, die durch das Angreifen der Druckkraft H hervorgerufen werden, sollen bestimmt werden. Die Differentialgleichung für die Biegelinie ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (1)$$

(E = Elastizitätsmodul und J = Trägheitsmoment). In dieser Gleichung ist M das Biegemoment, das sich aus dem Moment \mathfrak{M} durch die senkrechte Belastung und aus dem Moment $H y$ durch die Druckkraft H zusammensetzt.

$$M = \mathfrak{M} + H y. \quad (2)$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. (1) ein, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{H}{EJ} y = -\frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ}. \quad (3)$$

Die Biegelinie des Trägers muß also der Differentialgleichung (3) genügen. Grundsätzlich bereitet es nun keine Schwierigkeiten, die Differentialgleichung (3) zu lösen.

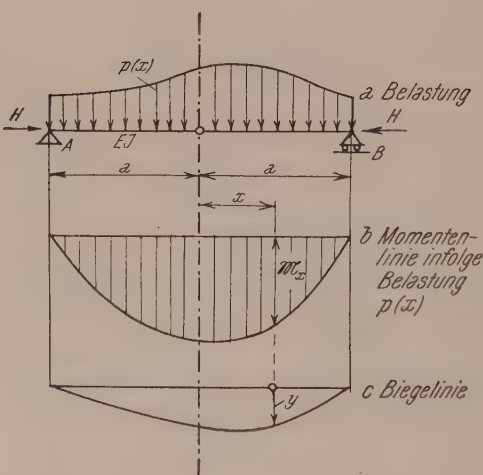


Abb. 1.

Für die praktische Berechnung hingegen erweist es sich vorteilhaft, diese Aufgabe nicht unmittelbar zu lösen, sondern die Frage zu stellen, ob es nicht spezielle Funktionen $\mathfrak{M}(x)$ gibt, die so beschaffen sind, daß sie der gesuchten Biegelinie proportional sind.

$$\frac{\mathfrak{M}}{E J} = \mu y. \quad (4)$$

Für diese speziellen Momentenlinien lautet die Gl. (3)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{H}{E J} + \mu \right) y = 0. \quad (5)$$

Setzt man

$$\frac{H}{E J} + \mu = \frac{1}{k^2} \quad (6)$$

(k hat die Dimension einer Länge), so lautet die Gl. (5)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{k^2} = 0. \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung dieser von jeder äußeren Belastung unabhängigen Gleichung lautet

$$y = A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k}. \quad (8)$$

Da es sich um einen frei aufliegenden Träger handelt, müssen die Durchbiegungen an den Auflagern Null sein.

$$y(+a) = 0, \quad y(-a) = 0. \quad (9)$$

Setzt man

$$\frac{a}{k} = q,$$

so lauten die Bedingungsgleichungen (9)

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \sin q + B \cos q, \\ 0 &= -A \sin q + B \cos q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dieses homogene Gleichungssystem kann jedoch nur dann bestehen, wenn die Determinante der Koeffizienten von A und B verschwindet. Somit bekommt man:

$$\begin{vmatrix} \sin q & \cos q \\ -\sin q & \cos q \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

oder

$$\sin 2q_i = 0; \quad (12)$$

$$q_0 = 0; \quad q_1 = \frac{\pi}{2}; \quad q_2 = \frac{2\pi}{2}; \quad q_i = \frac{i\pi}{2}; \quad \frac{1}{k_i} = \frac{i\pi}{2a}. \quad (13)$$

Die allgemeine Lösung, die den Randbedingungen angepaßt ist, lautet somit

$$y_i = A \sin \left(\frac{x}{k_i} + \frac{i\pi}{2} \right). \quad (14)$$

Die ersten fünf Lösungen sind nun:

$$\begin{aligned} i &= 0 & y_0 &= 0, \\ i &= 1 & y_1 &= A \cos \frac{\pi x}{2a}, \\ i &= 2 & y_2 &= A \sin \frac{2\pi x}{2a}, \\ i &= 3 & y_3 &= A \cos \frac{3\pi x}{2a}, \\ i &= 4 & y_4 &= A \sin \frac{4\pi x}{2a}. \end{aligned}$$

Die vier Lösungen für $i = 1$ bis $i = 4$ sind in Abb. 2 dargestellt.

Diese Lösungen werden die Eigenlösungen genannt. Es gibt also unendlich viele Biegelinien, die der Gl. (7) und den Randbedingungen genügen. Allerdings kann der Wert k nicht [Gl. (6)] willkürlich gewählt werden, sondern muß der Gl. (12) genügen.

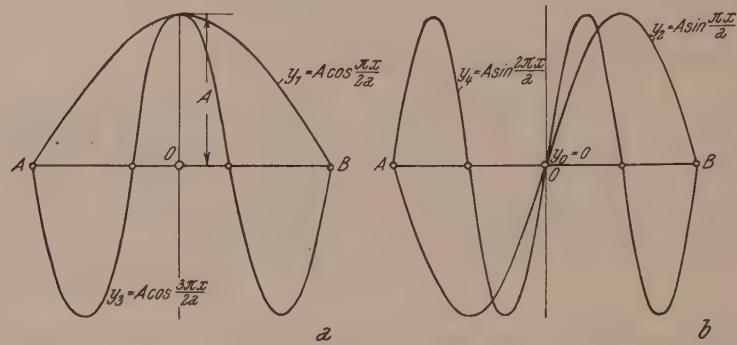


Abb. 2. Die Eigenlösungen. a) Die symmetrischen Lösungen $y_i = A \cos \frac{i\pi x}{2a}$ ($i = 1, 3, 5, \dots$).
b) Die antisymmetrischen Lösungen $y_i = A \sin \frac{i\pi x}{2a}$ ($i = 0, 2, 4, 6, \dots$).

Die Gl. (14) ist bis auf eine Konstante A , über die noch verfügt werden kann, eindeutig gegeben. Um nun diese noch frei verfügbare Konstante festzulegen, soll folgende, durch die späteren Berechnungen begründete Vereinbarung getroffen werden:

$$\int_{-a}^{+a} y_i^2 dx = a^3. \quad (15)$$

Setzt man für

$$y_i = A \sin \left(\frac{x}{k_i} + \frac{i\pi}{2} \right)$$

ein und integriert, so erhält man

$$A^2 a = a^3 \quad \text{oder} \quad A = a. \quad (16)$$

Die Lösungen der Gl. (7) lauten somit:

$$y_i = a \sin \left(\frac{x}{k_i} + \frac{i\pi}{2} \right). \quad (17)$$

Von diesen Lösungen kann man eine bemerkenswerte Eigenschaft aussagen, nämlich, daß sie orthogonal sind. Darunter versteht man die Eigenschaft, daß das Integral über das Produkt zweier verschiedener Lösungen y_i und y_j stets verschwindet:

$$\int_{-a}^{+a} y_i y_j dx = 0. \quad (18)$$

Dieser Nachweis kann wie folgt geführt werden. Die beiden Lösungen y_i und y_j genügen der Gl. (7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{dx^2} &= -\frac{1}{k_i^2} y_i, \\ \frac{d^2 y_j}{dx^2} &= -\frac{1}{k_j^2} y_j. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y_j und die zweite mit y_i und subtrahiert, so erhält man

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} y_j - \frac{d^2 y_j}{dx^2} y_i = -\left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_j^2} \right) y_i y_j. \quad (20)$$

Integriert man nun rechts und links vom Gleichheitszeichen über den ganzen Bereich von $-a$ bis $+a$, so erhält man auf der linken Seite

$$\int_{-a}^{+a} \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2} y_j - \frac{d^2 y_j}{dx^2} y_i \right) dx = \left| \frac{dy_i}{dx} y_j - \frac{dy_j}{dx} y_i \right|_{-a}^{+a} = 0. \quad (21)$$

Der Ausdruck (21) ist aber Null, da an den Auflagern sowohl y_i wie auch y_j Null sind. Wenn die linke Seite Null ist, und da voraussetzungsgemäß $k_i \neq k_j$ ist, bleibt die Bedingungsgleichung (18) übrig, die somit bewiesen ist.

Diese Eigenschaft wird beim Übergang zu beliebigen \mathfrak{M} -Werten von Nutzen sein.

Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage ist: Es gibt unendlich viele Momentenlinien

$$\mathfrak{M}_1 = y_1 \mu_1 EJ, \quad \mathfrak{M}_2 = y_2 \mu_2 EJ, \dots,$$

die die Eigenschaft haben, den Durchbiegungen y_1, y_2 , die durch $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \dots$ hervorgerufen werden, proportional zu sein.

Nun kehren wir zu einer beliebigen Momentenverteilung \mathfrak{M} zurück und fragen uns, ob es möglich ist, eine solche Momentenverteilung in Eigenlösungen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \dots$ zu zerlegen. Wenn dies der Fall ist, muß die Gleichung gelten:

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ} = C_1 y_1 \mu_1 + C_2 y_2 \mu_2 + C_3 y_3 \mu_3 + \dots \quad (22)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $C_1, C_2, C_3 \dots$ bedienen wir uns der Eigenschaften (15) und (18) der Funktionen $y_1, y_2 \dots$

Multipliziert man (22) mit y_1 , so erhält man:

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ} y_1 = C_1 \mu_1 y_1^2 + C_2 \mu_2 y_1 y_2 + C_3 \mu_3 y_1 y_3 + \dots \quad (23)$$

Integriert man über den Bereich von $-a$ bis $+a$, so erhält man auf der linken Seite

$$\int \frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ} y_1 dx$$

und rechts

$$C_1 \mu_1 a^3,$$

so daß C_1 sich ergibt

$$C_1 = \frac{1}{a^3 \mu_1} \int_{-a}^{+a} \frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ} y_1(x) dx. \quad (24)$$

Ebenso erhält man allgemein

$$C_i = \frac{1}{a^3 \mu_i} \int_{-a}^{+a} \frac{\mathfrak{M}(x)}{EJ} y_i dx. \quad (25)$$

Diese Werte kann man noch weiter ausführen:

$$C_i = \frac{1}{a^3 \mu_i EJ} \varphi_i \quad (26)$$

mit

$$\varphi_i = \int_{-a}^{+a} \mathfrak{M}(x) \sin\left(\frac{x}{k_i} + \frac{i\pi}{2}\right) dx. \quad (27)$$

Die Berechnung dieser Werte ist einfach, wobei man zweckmäßig die Funktion \mathfrak{M} in einen symmetrischen Anteil $\overline{\mathfrak{M}}$ und in einen antimetrischen Anteil $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ aufspaltet.

Man erhält

$$\bar{\varphi}_i = \int_{-a}^{+a} \bar{\mathfrak{M}} \cos \frac{\bar{i} \pi x}{2a} dx, \quad \bar{i} = 1, 3, 5, 7 \quad (28)$$

und

$$\bar{\bar{\varphi}}_i = \int_{-a}^{+a} \bar{\bar{\mathfrak{M}}} \sin \frac{\bar{i} \pi x}{2a} dx, \quad \bar{i} = 0, 2, 4, 6. \quad (29)$$

Die Ausdrücke

$$\bar{C}_i y_i \mu_i = \frac{1}{a E J} \bar{\varphi}_i \cos \frac{\bar{i} \pi x}{2a}, \quad (30)$$

$$\bar{\bar{C}}_i y_i \mu_i = \frac{1}{a E J} \bar{\bar{\varphi}}_i \sin \frac{\bar{i} \pi x}{2a} \quad (31)$$

ergeben, in (23) eingesetzt,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & \frac{1}{a} \left(\bar{\varphi}_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + \bar{\varphi}_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} + \bar{\varphi}_5 \cos \frac{5\pi x}{2a} + \right. \\ & \left. + \dots + \bar{\bar{\varphi}}_2 \sin \frac{\pi x}{a} + \bar{\bar{\varphi}}_4 \sin \frac{2\pi x}{a} + \dots \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Da das Moment $\frac{\mathfrak{M}_1}{E J} = y_1 \mu_1$ die Durchbiegung y_1 hervorruft, so ist der Anteil der Durchbiegung, der durch $C_1 y_1 \mu_1$ hervorgerufen wird:

$$C_1 y_1 = \frac{1}{a E J} \frac{\bar{\varphi}_1}{\mu_1} \cos \frac{\pi x}{2a}.$$

Die gesamte Durchbiegung ist:

$$y = \frac{1}{a E J} \left(\frac{\bar{\varphi}_1}{\mu_1} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{\bar{\varphi}_3}{\mu_3} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \dots + \frac{\bar{\bar{\varphi}}_2}{\mu_2} \sin \frac{2\pi x}{2a} + \frac{\bar{\bar{\varphi}}_4}{\mu_4} \sin \frac{4\pi x}{2a} + \dots \right). \quad (33)$$

Diese Biegelinie kann in eine symmetrische \bar{y} und eine antimetrische $\bar{\bar{y}}$ zerlegt werden.

$$y = \frac{1}{a E J} \left(\frac{\bar{\varphi}_1}{\mu_1} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{\bar{\varphi}_3}{\mu_3} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \dots \right), \quad (34)$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{a E J} \left(\frac{\bar{\bar{\varphi}}_2}{\mu_2} \sin \frac{2\pi x}{2a} + \frac{\bar{\bar{\varphi}}_4}{\mu_4} \sin \frac{4\pi x}{2a} + \dots \right). \quad (35)$$

Betrachten wir diese Gleichungen etwas näher:

Wird der Wert μ_1 gleich Null, so wird \bar{y} unendlich groß. Diese Bedingung wird als erste Knickbedingung bezeichnet.

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1^2} - \frac{H}{E J} = \frac{\pi^2}{4a^2} - \frac{H}{E J} = 0. \quad (36)$$

Hieraus erhält man die Knickkraft

$$H_{k1} = \frac{\pi^2 E J}{4a^2}. \quad (37)$$

Entsprechend erhält man die höheren Knickkräfte

$$H_{k3} = \frac{9\pi^2 E J}{4a^2}, \quad H_{k5} = \frac{25\pi^2 E J}{4a^2}. \quad (38)$$

Diese Werte sind unabhängig von der äußeren Belastung.

Vianello hat zur Bestimmung der Knickkraft ein Iterationsverfahren gezeigt. Er geht von einer an sich beliebigen Biegelinie η_1 aus und bestimmt das Moment $M_2 = H \eta_1$. Für dieses Moment wird wiederum die Biegelinie η_2 bestimmt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis Momentenlinie und Biegelinie in allen Punkten proportional sind, d. h. also bis die Gl. (4) erfüllt ist. Nach dem hier gezeigten Verfahren bestimmt man sich die gleiche Biegelinie y_1 ohne Iteration, und zwar durch die Frage-

stellung (4), die zur Differentialgleichung (6) führte. Die Gl. (6) bringt aber auch alle höheren Knickwerte.

Bezeichnet man mit Knicksicherheit die Werte

$$\nu_1 = \frac{H_{k1}}{H} \quad \text{bzw.} \quad \nu_i = \frac{H_{ki}}{H}, \quad (39)$$

so wird

$$\mu_1 = \frac{H}{EJ} (\nu_1 - 1) \quad \text{bzw.} \quad \mu_i = \frac{H}{EJ} (\nu_i - 1) \quad (40)$$

und die Gl. (34) bzw. (35) lauten:

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha H} \left(\frac{\bar{\varphi}_1}{\nu_1 - 1} \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{\bar{\varphi}_3}{\nu_3 - 1} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \dots \right), \quad (41)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha H} \left(\frac{\bar{\varphi}_2}{\nu_2 - 1} \cos \frac{2\pi x}{2a} + \frac{\bar{\varphi}_4}{\nu_4 - 1} \cos \frac{4\pi x}{2a} + \dots \right). \quad (42)$$

Wenn die Werte $\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$ usw. endliche Größen annehmen, so ist die Biegelinie y nicht mehr der Biegelinie y_1 proportional. Diesen Gedankenfehler macht z. B. Dischinger¹ in seiner Arbeit. Die Proportionalität ist streng genommen nur dann gegeben, wenn die äußere Belastung cosinusförmig verteilt ist. Dann ist die Momentenlinie ebenfalls eine Cosinuslinie: $\mathfrak{M} = M_0 \cos \frac{\pi x}{2a}$. Zufolge der Orthogonalität ist

$$\bar{\varphi}_1 = M_0 \alpha, \quad \bar{\varphi}_3 = 0, \quad \bar{\varphi}_2 = 0. \quad (43)$$

Die Biegelinie wird:

$$\bar{y} = \frac{M_0}{H} \frac{1}{\nu_1 - 1} \cos \frac{\pi x}{2a} \quad (44)$$

und das Biegemoment

$$M = \mathfrak{M} + H y = \mathfrak{M} \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1}. \quad (45)$$

Nur in diesem Falle sind die Überlegungen Dischingers zutreffend. Bei beliebiger Belastung sind die Koeffizienten φ_i voneinander verschieden. Die Anteile, die die einzelnen φ_i -Werte haben, sind davon abhängig, wie nahe die Momentenlinie einer Eigenwertslinie liegt.

II. Einige Beispiele.

Einige Beispiele sollen die Anwendung der abgeleiteten Formeln zeigen.

- a) Auf einen Träger wirkt an den beiden Auflagern ein Moment \mathfrak{M} . Die Momentenlinie ist zu bestimmen (Abb. 3).

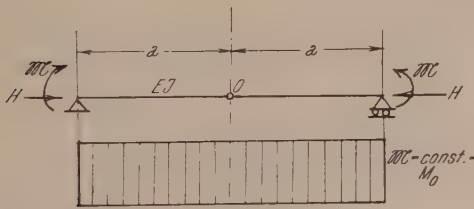


Abb. 3.

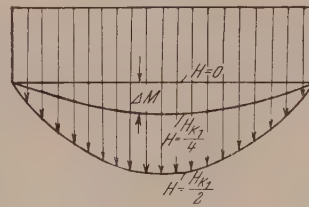


Abb. 4.

Da die Ausgangsmomentenlinie \mathfrak{M} symmetrisch ist, wird $y = \bar{y}$. Die φ_i -Werte berechnen sich aus (28)

$$\varphi_i = M_0 \int_{-a}^{+a} \cos \frac{i\pi x}{2a} dx = M_0 \frac{4a}{i\pi} \sin \frac{i\pi}{2}.$$

¹ Fr. Dischinger: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Knicken des Betons. Bau-Ing. 33/34 (1937).

Somit ist:

$$\varphi_1 = M_0 \frac{4a}{\pi}; \quad \varphi_3 = -M_0 \frac{4a}{3\pi}; \quad \varphi_5 = M_0 \frac{4a}{5\pi}; \quad \varphi_7 = -M_0 \frac{4a}{7\pi}.$$

Die Biegelinie wird:

$$y = \frac{4M_0}{H\pi} \left(\frac{1}{v_1-1} \cos \frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{3(v_3-1)} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \frac{1}{5(v_5-1)} \cos \frac{5\pi x}{2a} + \dots \right). \quad (46)$$

Die Biegelinie setzt sich nach Art einer Fourierschen Reihe zusammen. Die Durchbiegung in Feldmitte ist für $x=0$:

$$y_0 = \frac{4M_0}{H\pi} \left(\frac{1}{v_1-1} - \frac{1}{3(v_3-1)} + \frac{1}{5(v_5-1)} - \dots + \dots \right). \quad (47)$$

Im Grenzfall $H=0$ ergibt sich

$$\mu_1 = \frac{\pi^2}{4a^2}; \quad \mu_3 = \frac{9\pi^2}{4a^2}; \quad \mu_5 = 5^2\mu_1; \quad v_1-1 = \frac{EJ}{H}\mu_1; \quad v_3-1 = 9\frac{EJ}{H}\mu_1.$$

Setzt man diese Werte in (47) ein, so wird:

$$y_0 = \frac{16M_0 a^2}{EJ\pi^2} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots + \dots \right) = \frac{M_0 a^2}{2EJ}. \quad (48)$$

Damit ist bewiesen, daß im Grenzfall $H=0$ sich die Biegelinie des einfachen Trägers mit $M=\text{konst.}$ ergibt. Für endliche Werte von H ergeben sich Zusatzmomente $\Delta M = Hy$

$$Hy = \frac{4M_0}{\pi} \left(\frac{1}{v_1-1} \cos \frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{3(v_3-1)} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \frac{1}{5(v_5-1)} \cos \frac{5\pi x}{2a} - \dots + \dots \right). \quad (49)$$

Die Größe dieser Momente ist wesentlich davon abhängig, wie weit die Kraft H von einer der Knickkräfte entfernt ist. Ist beispielsweise die Kraft $H = \frac{H_{k1}}{2} = \frac{\pi^2 EJ}{8a^2}$, so ist das zusätzliche Moment in Feldmitte

$$\Delta M = \frac{4M_0}{\pi} \left(1 - \frac{1}{51} + \frac{1}{245} - \frac{1}{686} + \frac{1}{3249} - \dots + \dots \right) = 1.25 M_0 \quad (50)$$

und in den Viertelpunkten $M_{1/4} = 0.913 M_0$.

Tabelle 1.

H	$\nu = \frac{H_{k1}}{H}$	$\left(y_0 = \psi \frac{M_0 a^2}{2EJ} \right) \psi$	$\Delta M \text{ in Feldmitte}$
0	∞	1.000	0.0000 M_0
$H_{k1}/10$	10.00	1.111	0.1370 M_0
$H_{k1}/5$	5.00	1.258	0.3100 M_0
$H_{k1}/3$	3.33	1.442	0.5320 M_0
$H_{k1}/2.5$	2.50	1.683	0.8310 M_0
$H_{k1}/2$	2.00	2.030	1.2500 M_0
$H_{k1}/1.67$	1.67	2.550	1.8840 M_0
$H_{k1}/1.25$	1.25	5.120	5.0500 M_0
$H_{k1}/1$	1.00	∞	∞

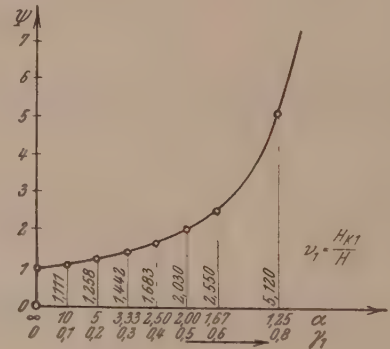


Abb. 5. Zunahme der Durchbiegung und der Momente in Feldmitte bei Ansteigen von H .

Die Momentenlinien für $H=0$; $H = \frac{1}{4} H_{k1}$; $H = \frac{1}{2} H_{k1}$ zeigt die Abb. 4.

Je mehr die Druckkraft H sich der ersten Knickkraft H_{k1} nähert, um so größer werden die Durchbiegungen. In der Tab. 1 sind für verschiedene H -Werte die Durchbiegungen y_0 in Feldmitte und die Zusatzmomente ΔM berechnet. Die Abb. 5 gibt den Zusammenhang von y_0 , ausgedrückt durch $y_0 = \psi_0 \frac{M_0 a^2}{2EJ}$ und $\nu = \frac{H_{k1}}{H}$, wieder.

Steigt die Last H über den Wert der ersten Knickbedingung hinaus, so werden die y -Werte wieder endlich (Abb. 6).

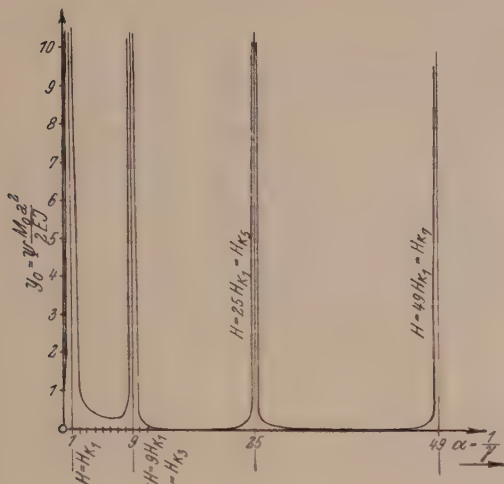


Abb. 6. Verlauf der Durchbiegung in Feldmitte bei Ansteigen von H über die erste Knickkraft hinaus.

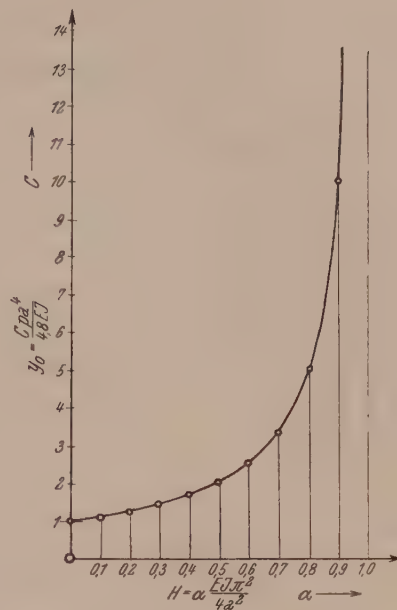


Abb. 8.

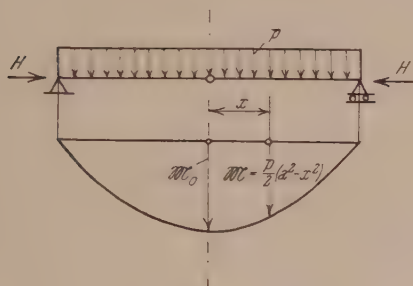


Abb. 7.

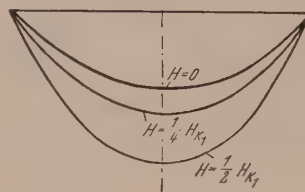


Abb. 9.

b) Gleichmäßig verteilte Last.

Ein weiteres einfaches Beispiel, bei dem die Biegelinie symmetrisch ist, bekommen wir bei gleichmäßig verteilter Last. Die Momentenlinie bei $H = 0$ ist (Abb. 7):

$$\mathcal{M} = \frac{p}{2} (a^2 - x^2). \quad (51)$$

Damit erhält man die φ_i -Werte [Gl. (28)].

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i &= \int_{-a}^{+a} \mathcal{M}(x) \cos \frac{i \pi x}{2a} dx = \frac{16 p a^3}{i^3 \pi^3} \sin \frac{i \pi}{2}; \\ \bar{\varphi}_1 &= \frac{16 p a^3}{\pi^3}; \quad \bar{\varphi}_3 = -\frac{16 p a^3}{3^3 \pi^3}; \quad \bar{\varphi}_5 = \frac{16 p a^3}{5^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

Die Lösung ergibt sich nach Gl. (33) zu

$$y = \frac{16 p a^2}{\pi^2 E J} \left(\frac{1}{\mu_1} \cos \frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{\mu_3} \frac{1}{3^3} \cos \frac{3 \pi x}{2a} + \frac{1}{\mu_5} \frac{1}{5^3} \cos \frac{5 \pi x}{2a} - \dots + \dots \right). \quad (52)$$

Insbesondere erhält man die Durchbiegung in Feldmitte zu

$$y_0 = \frac{16 p a^3}{\pi^3 E J} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{27} \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{125} \frac{1}{\mu_5} - \dots + \dots \right) \quad (53)$$

Für $H = 0$ wird

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{4 a^2}{\pi^2}; \quad \frac{1}{\mu_3} = \frac{4 a^2}{3^2 \pi^2}; \quad \frac{1}{\mu_5} = \frac{4 a^2}{5^2 \pi^2}.$$

Für diesen Grenzfall ist

$$y_0 = \frac{64 p a^4}{E J \pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots \right) = \frac{p a^4}{4 \cdot 8 E J}. \quad (54)$$

(Dieser Wert ergibt sich aus der üblichen Rechnung.)

Die Abb. 8 gibt die Durchbiegung nach (53) für die Feldmitte in Abhängigkeit von der Kraft H an.

Die zusätzliche Momentenlinie ist

$$\Delta M = H y.$$

Ist beispielsweise

$$H_1 = \frac{1}{2} H_{k1} = \frac{\pi^2 E J}{8 a^2},$$

so wird

$$\mu_1 = \frac{8 a^2}{\pi^2}; \quad \mu_3 = \frac{8 a^2}{17 \pi^2}; \quad \mu_i = \frac{8 a^2}{(2 i^2 - 1) \pi^2}; \quad i = 1, 3, 5, 7$$

und

$$\Delta M = \frac{16 p a^2}{\pi^3} \left(\cos \frac{\pi x}{2 a} - \frac{1}{3^3} \frac{1}{17} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + \frac{1}{5^3} \frac{1}{49} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} - \dots + \dots \right).$$

In Feldmitte $x = 0$ wird

$$\Delta M_0 = 1.029 \frac{p a^2}{2} = 1.029 M_0.$$

Ist

$$H = \frac{1}{4} H_{k1} = \frac{\pi^2 E J}{16 a^2},$$

so wird

$$\mu_1 = \frac{16 a^2}{3 \pi^2}; \quad \mu_3 = \frac{16 a^2}{35 \pi^2}; \quad \mu_i = \frac{16 a^2}{(4 i^2 - 1) \pi^2}$$

und in Feldmitte

$$\Delta M = 0.343 M_0.$$

Die Abb. 9 zeigt die Zunahme der Momente an.

Setzt man $\nu = \frac{H_{k1}}{H}$, so wird

$$\mu_1 = \frac{H_{k1}}{E J} \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

Berücksichtigt man nur das erste Glied in der Reihe, dann wird

$$y = \frac{64 p a^4}{E J \pi^5} \frac{\nu}{\nu - 1} \cos \frac{\pi x}{2 a}.$$

Das Gesamtmoment in Feldmitte beträgt dann:

$$M = M_0 \frac{\nu + 0.032}{\nu - 1}.$$

Diese Formel, die für gleichmäßig verteilte Last gilt, kann nicht verallgemeinert werden. Bei einem Belastungsfall, der nicht mit jenem übereinstimmt, der der ersten

Eigenfunktion ähnlich ist, kann das erste Bild verschwinden und die Biegelinie y und damit auch die zusätzlichen Momente z. B. der zweiten Eigenlinie ähnlich werden.

c) Einzellast in Feldmitte.

Bei einer Einzellast in Feldmitte ist die Momentenlinie (Abb. 10)

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} (a - x).$$

Die Durchbiegung wird

$$y = \frac{2 P a}{\pi^2 H} \left(\frac{1}{\nu_1 - 1} \cos \frac{\pi x}{2 a} + \frac{1}{9} \frac{1}{\nu_3 - 1} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + \frac{1}{25} \frac{1}{\nu_5 - 1} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} + \dots \right).$$

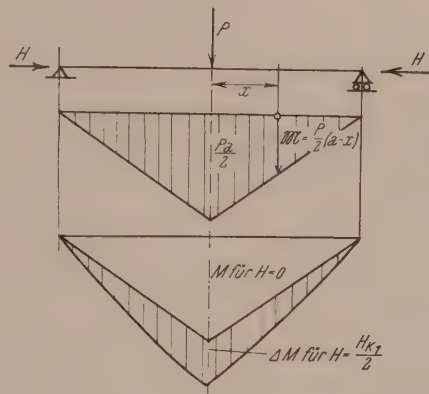


Abb. 10.

Das zusätzliche Moment ist:

$$\Delta M = H y = \frac{2 P a}{\pi^2} \left(\frac{1}{\nu_1 - 1} \cos \frac{\pi x}{2 a} + \frac{1}{9} \frac{1}{\nu_3 - 1} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + \frac{1}{25} \frac{1}{\nu_5 - 1} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} \right).$$

α) In Feldmitte:

$$\Delta M = \frac{2 P a}{\pi^2} \left(\frac{1}{\nu_1 - 1} + \frac{1}{9} \frac{1}{\nu_3 - 1} + \frac{1}{25} \frac{1}{\nu_5 - 1} + \dots \right).$$

Für $H = \frac{1}{2} H_{k1}$ wird $\nu_1 = \frac{H_{k1}}{H} = 2$, somit $\nu_1 - 1 = 1$,

$$\nu_3 = \frac{9 H_{k1}}{H} = 18, \quad \nu_3 - 1 = 17,$$

$$\nu_5 = \frac{25 H_{k1}}{H} = 50, \quad \nu_5 - 1 = 49.$$

Das zusätzliche Moment in Feldmitte ist:

$$\Delta M = \frac{P a}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 49}.$$

β) In den Viertelpunkten wird:

$$\Delta M = \frac{P a}{4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 765}.$$

Die Abb. 10 zeigt das Ergebnis.

Berücksichtigt man nun das erste Glied in den Reihen, so wird:

$$M_0 = \frac{P a}{2} \frac{\nu_1 - 0.595}{\nu_1 - 1}.$$

d) Einzellast im Viertelpunkt.

Das Beispiel zeigt den Rechnungsgang bei unsymmetrischer Belastung (Abb. 11).

Zunächst wird eine symmetrische Belastung $\frac{P}{2}$ in den Punkten A und A' aufgebracht und hierfür die Momentenlinie $\overline{\mathfrak{M}}$ bestimmt (Abb. 11b und c). Für diesen Lastfall wird die Biegelinie \bar{y} bzw. die Momentenlinie $\Delta \overline{\mathfrak{M}}$ der zusätzlichen Momente bestimmt. Ferner wird die antimetrische Last (Abb. 11d) aufgebracht mit der Momentenlinie $\overline{\mathfrak{M}}$ (Abb. 11e). Die Überlagerung der beiden Lastfälle (b) und (d) gibt den Lastfall a und die Momentenlinie f .

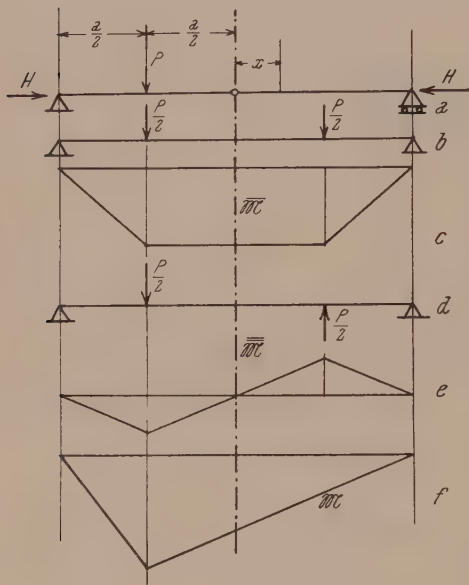
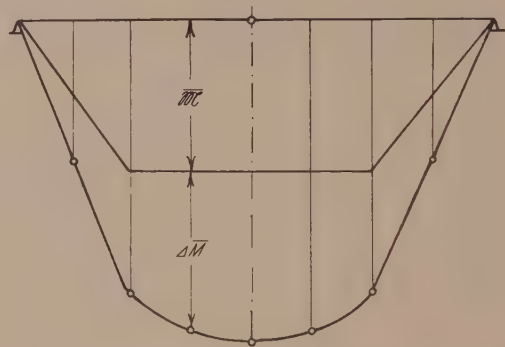
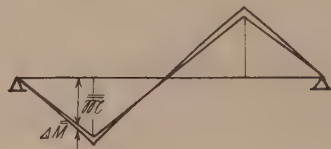


Abb. 11.

Abb. 12. Zusätzliche Momente $\Delta \overline{\mathfrak{M}}$ für den symmetrischen Lastfall.Abb. 13. Zusätzliche Momente $\Delta \overline{\mathfrak{M}}$ für den antisymmetrischen Fall.

Die Momentenlinie $\overline{\mathfrak{M}}$ hat die Gleichung

$$\alpha) \text{ im Bereich für } x \text{ von } 0 \text{ bis } a/2 \quad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{P a}{4};$$

$$\beta) \text{ im Bereich für } y \text{ von } a/2 \text{ bis } a \quad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{P}{2} (a - x).$$

Mit dieser Momentenlinie kann man die Berechnung der zusätzlichen Momente, wie vorhin gezeigt, durchführen.

Ist beispielsweise $H = \frac{1}{2} H_{k1}$, so erhält man

$$x = 0 \quad \Delta \overline{\mathfrak{M}}_0 = 1.139 \overline{\mathfrak{M}}_0,$$

$$x = \frac{a}{2} \quad \Delta \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{a}{2}} = 0.810 \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{a}{2}},$$

$$x = \frac{a}{4} \quad \Delta \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{a}{4}} = 1.058 \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{a}{4}},$$

$$x = \frac{3a}{4} \quad \Delta \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{3a}{4}} = 0.885 \overline{\mathfrak{M}}_{\frac{3a}{4}}.$$

Die Momentenlinie zeigt Abb. 12.

Die Momentenlinie $\overline{\overline{M}}$ hat die Gleichung

$$\alpha) \text{ im Bereich für } x = 0 \text{ bis } a/2 \quad \overline{\overline{M}} = -\frac{P}{4} x,$$

$$\beta) \text{ im Bereich für } x = a/2 \text{ bis } a \quad \overline{\overline{M}} = -\frac{P}{4} (a - x).$$

Das Ergebnis der Rechnung für $H = \frac{H_{k1}}{2}$ zeigt Abb. 13.

Die Abb. 14 gibt die gesamte Momentenlinie an.

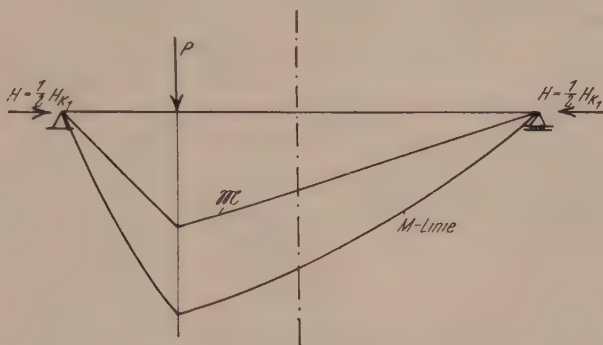


Abb. 14. Gesamtmomentenlinie.

Berücksichtigt man nur die ersten beiden Glieder in der Sinus- und Cosinusreihe, so erhält man in Feldmitte für den symmetrischen Lastfall

$$\overline{M}_0 = \overline{\overline{M}}_0 \frac{\nu_1 + 0.14}{\nu_1 - 1}$$

und in den Viertelpunkten für den antimetrischen Lastfall

$$\overline{\overline{M}}_{\frac{a}{2}} = \overline{\overline{M}}_{\frac{a}{2}} \frac{\nu_2 - 0.188}{\nu_2 - 1}.$$

Wie die Gegenüberstellungen zeigen, ist es nicht möglich, die zusätzlichen Momente durch eine einheitliche Formel darzustellen, da die Größe der Momente wesentlich von den Integralen

$$\overline{\varphi}_1 = \int_{-a}^{+a} \overline{\overline{M}} \cos \frac{\pi x}{2a} dx \quad \text{bzw.} \quad \overline{\varphi}_2 = \int_{-a}^{+a} \overline{\overline{M}} \sin \frac{\pi x}{a} dx$$

abhängig ist. Diese Werte werden aber durch die Momentenlinien $\overline{\overline{M}}$ bzw. $\overline{\overline{M}}$ des unverformten Systems stark beeinflusst.

Im vorstehenden wurde gezeigt, welchen großen Einfluß die Momente 2. Ordnung haben. Diese Aufgabe ist eine Vorstudie für die Berechnung der zusätzlichen Momente bei Bogenbrücken.

(Eingegangen am 3. Mai 1955.)

Kritik der gebräuchlichsten Verfahren zur Berechnung der Sicherheit von Böschungen gegen Rutschung.

Von O. K. Fröhlich, Wien.

Mit 9 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden die „indirekten“ Verfahren zur Bestimmung der Sicherheit gegen Gleiten einer Erdmasse auf kreiszylindrischer Gleitfläche von W. Fellenius, H. Krey, D. W. Taylor und die als Sicherheitsdefinitionen aufgefaßten Regeln von W. Fellenius und J. Ohde einer kritischen Betrachtung unterzogen. Es wird gezeigt, daß diese Regeln strenge nur für die ebene Gleitfläche gelten und daher für das Gleitkreisverfahren als Näherungen zu betrachten sind. Eine bodenstatistisch einwandfreie Definition der Gleitsicherheit wird entwickelt und auf das darauf gegründete „direkte“ Verfahren, welches die statische Unbestimmtheit des Problems beherrscht, hingewiesen. Die im Schrifttum vorhandenen Beziehungen zwischen den Größen H , γ , c , φ und der Neigung ω einer Böschung mit Gleitkreisen durch den Böschungsfußpunkt werden in einem Diagramm durch Hüllkurven dargestellt und dessen Anwendung mit Hilfe der „Regeln“ und auch unter Beachtung der strengen Gleitsicherheitsdefinition gegeben. Die Mängel gebräuchlicher Verfahren, welche die Gleichgewichtsbedingungen für den Eintritt der Rutschung nicht beachten, werden aufgezeigt.

Summary. In this paper the „indirect“ procedures after W. Fellenius, H. Krey, D. W. Taylor for computing the factor of safety of an earthy mass against sliding along the arc of a circle and the definitions of safety by the rules of W. Fellenius and J. Ohde are criticized. It is shown that these rules are only valid for the plane sliding surface and, therefore, are to be considered as approximations for the slip circle method. A soil-statically correct definition of the safety against sliding is being developed and, in connection with it, a procedure checking the statical undeterminateness of the problem, is referred to. The well known relations between the values H , γ , c , φ and the inclination ω of a slope, relating to toe circles, are represented by a diagram of envelopes, the application of which, making use of the „rules“ as well as of the correct definition of the factor of safety, is explained. The shortcomings of certain usual procedures, which disregard the conditions of equilibrium on the verge of sliding, are mentioned.

Résumé. Dans le présent rapport nous avons fait une critique des procédés «indirects» d'après W. Fellenius, H. Krey, D. W. Taylor pour la détermination de la sécurité contre le glissement d'un massif de terre de long d'une surface circulaire et des définitions de la sécurité exprimée par les «règles» de W. Fellenius et J. Ohde. Ces «règles» ne valent rigoureusement que pour la surface plane de glissement et doivent donc être considérées comme approximatives au cas d'un glissement circulaire. Une définition de la sécurité contre le glissement, correcte au point de vue de la statique des sols, est déduite et le procédé «direct», basé sur cette définition, qui tient compte du caractère statiquement indéterminé du problème, est expliqué. Les relations bien connues entre les valeurs H , γ , c , φ et l'inclinaison ω du talus, relatives à des cercles de glissement, passant par son pied, sont représentées par des enveloppes dans un diagramme, dont l'application à l'aide des «règles» et également à la base de la définition correcte de la sécurité, est démontrée. Les manquements de certains procédés usuels, ne tenant pas compte des conditions de l'équilibre à la limite du glissement, sont mentionnés.

I. Einleitung.

In der ersten Hälfte des laufenden Jahrhunderts erfuhr die Zahl der beobachteten Rutschungen von Böschungen von Dämmen und Einschnitten im Zuge von Straßen- und Eisenbahn- sowie bei Kanal- und Hafenbauten eine nicht zu übersehende Steigerung, deren Ursache kaum in ungünstigen meteorologischen Verhältnissen allein, sondern in der Tatsache zu suchen sein dürfte, daß die modernen Verkehrswege, insbesondere die Straßen, infolge ihrer größeren Breite tiefere An- und Einschnitte in das Gelände und höhere Dämme erfordern, als dies früher der Fall war. Bei Kanal- und Hafenbauten spielt dabei die vom Schiffsverkehr geforderte größere Wassertiefe eine ausschlaggebende Rolle. Da die von früher her stammenden gebräuchlichen zulässigen Böschungsneigungen für verschiedene Bodenarten auch bei Ausführung höherer Böschungen beibehalten wurden, wurde der Sicherheitsgrad gegen

Gleiten kohärenter Erdmassen so herabgesetzt, daß es oft zu Unfällen schon während des Baues, aber auch zu Erdbewegungen nach Fertigstellung der betreffenden Erdbauwerke kam.

Es ist daher verständlich, daß sich die technische Wissenschaft und Praxis schon seit Jahrzehnten für die Zusammenhänge zwischen den Festigkeitseigenschaften der verschiedenen Bodenarten und der Standfestigkeit von Böschungen in stets steigendem Maße interessiert, obwohl von vorneherein klar war, daß man, infolge der im Boden stets vorhandenen Inhomogenitäten, niemals zu einer exakten Lösung dieses Problems gelangen würde.

Der einfachste Fall einer Hang- oder Böschungsrutschung ist durch das Auftreten einer Gleitfläche gekennzeichnet, die in der Nähe des oberen Böschungsrandes, ziemlich steil nach unten verlaufend, beginnt und im Hangfuß oder vor diesem ziemlich flach endet. Verwickeltere Fälle weisen mehrere kurz nacheinander auftretende Gleitflächen, also ein Gleitflächensystem auf, dessen Zusammenhang meist nur schwer erklärt werden kann, besonders dann, wenn die zeitliche Aufeinanderfolge der einzelnen Gleitphasen nicht beobachtet wurde.

Die bisherigen bodenmechanischen Bemühungen beziehen sich auf die Beurteilung der Gleitgefahr eines Hanges, wenn der oben erwähnte einfachste Fall, also eine einzige Gleitfläche, vorliegt. Auch die Schichtung des Bodens wird bei der Behandlung des Grundfalles außer acht gelassen und die Gleitfläche als unendlich lange waagrechte Zylinderfläche angesehen, so daß man es mit einem im Querschnitt der Böschung wirkenden ebenen Kraftsystem zu tun hat.

Das allgemeinste Verfahren zur Beurteilung der Rutschgefahr einer Böschung besteht darin, das Spannungsfeld in der Erdmasse in der Nähe der Böschung zu bestimmen und jene Gebiete aufzusuchen, in denen das kritische Hauptspannungsverhältnis die größten Werte besitzt. In diesen Gebieten kann die Ausbildung einer Gleitfläche erwartet werden. Die äußeren Kräfte, die das Spannungsfeld erzeugen, sind das Eigengewicht unter Berücksichtigung des Auftriebes, die Drücke, welche durch eine eventuell vorhandene Sickerströmung im Hangmaterial entstehen, hydrostatische Überdrücke, die z. B. von der Verdichtung eines künstlich hergestellten Dammes herrühren oder durch artesische Erscheinungen hervorgerufen werden, Zusatzlasten durch Errichtung von Bauwerken in der Nähe des oberen Böschungsrandes, plötzliche Absenkung des Wasserspiegels eines Staubeckens, welches der Damm begrenzt, Beschleunigung der Böschungsmasse durch ein Erdbeben usw.

Dieses allgemeine Verfahren erfordert einen bedeutenden Arbeitsaufwand und ist heute noch nicht so weit entwickelt, daß es in der Erdbaupraxis angewendet werden kann¹.

Die gebräuchlichsten Verfahren zur Berechnung der Sicherheit von Böschungen gegen Rutschung beruhen darauf, daß die wirkliche Gleitfläche durch eine willkürlich angenommene ersetzt und diese nach Form und Lage so lange variiert wird, bis sie zur gefährlichsten geworden ist.

Schwedische Ingenieure haben auf Grund zahlreicher Beobachtungen stattgefundener Böschungsrutschungen Ende des ersten Weltkrieges die kreiszylindrische Gleitfläche als Grundlage für die Beurteilung der Rutschgefahr vorgeschlagen und damit das heute gebräuchlichste „Gleitkreisverfahren“ geschaffen, welches seither in verschiedenen Ländern in einigermaßen abgeänderten Formen im Gebrauche steht. Über dieses Verfahren soll im folgenden ausschließlich gesprochen werden.

¹ O. K. Fröhlich: General Theory of Stability of Slopes. Proc. European Conference on Stability of Earth Slopes 1954, Vol 1, pp. 40—56.

Ersetzt man die wirkliche Gleitfläche im Querschnitt der Böschung durch eine logarithmische Spirale, so erhält man das „Gleitspiraleverfahren“, worüber Verfasser in ² berichtet hat.

II. Das Gleitkreisverfahren nach W. Fellenius (Lamellenverfahren).

Der zwischen zwei in der Entfernung „Eins“ gedachten Querschnitten der Böschung, unten von der Gleitfläche, oben von der Geländeoberfläche begrenzte „Rutschkörper“ wird durch vertikale Ebenen senkrecht zum Querschnitt in „Lamellen“ geteilt. Jede Lamelle sei der Einfachheit halber nur durch ihr Eigengewicht und die Reaktionskräfte in der Gleitflächenbegrenzung beansprucht. In den beiden seitlichen Begrenzungsebenen einer Lamelle nimmt Fellenius Erddrücke an, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und deren Wirkungslinien zusammenfallen. Diese Erddrücke heben einander daher auf. Durch diese Näherung erhält Fellenius ein statisch bestimmtes Gleichgewichtsproblem für den Rutschkörper.

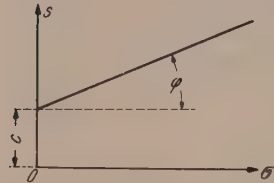


Abb. 1. Scherdiagramm.

Die Normal- und Schubspannungen in der Gleitfläche werden dem Coulombschen Gesetz

$$s = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

folgend angenommen, worin s die Scherfestigkeit, c die sog. Kohäsion des Hangmaterials, σ die Normalspannung, φ den Winkel des Scherwiderstandes bedeuten.

Die graphische Darstellung der Gl. (1) (s. Abb. 1) heißt „Scherdiagramm“ des Hangmaterials.

(Dieses Diagramm wird durch Dauer- und Schnellversuche beim Abscheren ungestörter bindiger Böden annähernd in dieser Form erhalten. Die Vorbelastung σ wird so lange durchgeführt, bis die Bodenprobe vollständig konsolidiert ist. Das Abscheren kann sehr langsam oder sehr schnell erfolgen. Der Diagrammverlauf ist von der langsamen bzw. schnellen Versuchsdurchführung abhängig. Der Wert c ist nicht identisch mit der wahren Kohäsion des Bodens für irgendeinen Wert von σ , ebensowenig ist φ der wahre Winkel der inneren Reibung.)

Dieses Verfahren zielt darauf hin, Wertepaare (c, φ) zu bestimmen, für welche der Rutschkörper gerade im Gleichgewicht ist oder, mit anderen Worten, Scherdiagramme zu suchen, für welche die Sicherheit S gegen Gleiten „Eins“ ist. Die Höhe der Böschung, welche der Bedingung

$$S = 1 \quad (2)$$

entspricht, heißt die „kritische Höhe“ der betreffenden Böschung. Der Vorgang bei diesem Verfahren ist normalerweise der, daß eine gewisse Kohäsion c angenommen und der dazu für $S = 1$ passende Wert des Reibungswinkels φ gesucht wird.

Von den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Kräftesystems

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

sind die beiden ersten erfüllt, wenn sich der Kraftplan aus den äußeren Kräften (Eigengewicht der Lamellen) und den Kräften, die sich aus den Scher- und Normalspannungen (s und σ) in der Gleitfläche ergeben, schließt.

² O. K. Fröhlich: The Factor of Safety with Respect to Sliding of a Mass of Soil along the Arc of a Logarithmic Spiral. Proc. Third Intern. Conference on Soil Mechanics and Found. Eng. 1953, Vol. II, pp. 230—233.

Es wird daher zu dem angenommenen c -Wert probeweise ein φ -Wert gewählt, der so lange variiert wird, bis der Kraftplan sich schließt. Die dritte Gleichgewichtsbedingung $M = 0$ berücksichtigt das Verfahren überhaupt nicht. Ganz analog werden die zu c gehörigen φ -Werte bestimmt, wenn der Halbmesser des Gleitkreises und die Lage seines Mittelpunktes variiert wird. Von den untersuchten Gleitkreisen ist jener der gefährlichste, welcher zu dem größten gefundenen φ -Wert gehört.

Bei der Durchführung dieser Untersuchungen wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Resultierende aus der Normalkraft und der Reibungskraft für jede Lamellenbasis mit dem zugehörigen Gleitkreisradius r den Winkel φ einschließt, daher einen zum Gleitkreis konzentrischen Kreis mit dem Radius $r \cdot \sin \varphi$ berühren muß („Reibungskreis“).

Fellenius hat in seiner Schrift³ die Ergebnisse seiner Berechnungen der kritischen Höhen von Böschungen in Form von Diagrammen veröffentlicht. Über den wichtigen Begriff des Sicherheitsgrades gegen Gleiten findet sich auf der letzten Seite der Schrift eine Bemerkung die man als Definition des Sicherheitsfaktors auffassen kann. Sie beruht auf der Annahme, daß die Sicherheit gegen Gleiten im selben Verhältnis steigt, in welchem die Kohäsion c und der Reibungswert $\operatorname{tg} \varphi$ gleichzeitig erhöht werden, und lautet daher: Der Sicherheitsgrad gegen Gleiten einer Erdmasse mit den gegebenen Kennziffern \bar{c} und $\bar{\varphi}$ ist jene Zahl η , durch die man \bar{c} und $\operatorname{tg} \bar{\varphi}$ zu teilen hat, um zu Werten c und $\operatorname{tg} \varphi$ zu gelangen, welche den Rutschkörper gerade im Gleichgewicht halten, das heißt

$$\frac{\bar{c}}{\eta} = c, \quad \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\eta} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (4)$$

wobei c und φ aus einem Diagramm für vorausberechnete Fälle $S = 1$ zu entnehmen sind. η wird probeweise angenommen und so lange variiert, bis beide Gl. (4) erfüllt sind.

Diese Definition beruht auf Intuition; einen Beweis für ihre Berechtigung hat Fellenius nicht gegeben. Er fügt nur hinzu, daß sie für kleine Reibungswinkel $\bar{\varphi}$ bzw. φ gilt, daher als eine Näherung zu betrachten ist.

Diese Sicherheitsdefinition ist in das Schrifttum als „Fellenius-Regel“ eingeführt worden⁴, S. 5.

III. Weiterentwicklung des Gleitkreisverfahrens durch H. Krey.

Krey⁵ vereinfacht (S. 124) die vorliegende Aufgabe für reine Reibungsböden ($c = 0$) und bestimmt den erforderlichen Reibungswinkel φ_{erf} für den ungünstigsten Fall, indem er die Normalspannungen σ im Schnittpunkt der Normalspannungsergebnisse mit dem Gleitkreis konzentriert annimmt. Durch diese Annahme wird ein statisch bestimmter Grenzfall aus dem ganzen statisch unbestimmten Bereich der Normalspannungsverteilung herausgegriffen. Zur Korrektur des dabei entstehenden Fehlers verteilt er die Normalspannungen parabolisch (sichelförmig) über den Gleitkreisbogen, wodurch abermals ein Fehler entsteht, weil die Resultierende aller Normalspannungen im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt des Gleitkreisbogens geht.

Ein anderes von Krey empfohlenes Verfahren stützt sich auf das Lamellenverfahren mit Berücksichtigung der Erddrücke auf die Lamellenbegrenzungen, wobei jedoch auf die Erfüllung der dritten Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ bewußt verzichtet

³ W. Fellenius: Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion (Adhäsion) und unter Annahme kreiszylindrischer Gleitflächen, 2. Aufl. Berlin: W. Ernst & Sohn. 1940.

⁴ O. K. Fröhlich: Über erdstatische Berechnungen. Ber. XIII. Österr. Straßentag 1951. Selbstverlag d. Forschungsges. f. d. Straßenwesen, Wien 1951.

⁵ H. Krey: Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes, 5. Aufl. (berichtigt und ergänzt von J. Ehrenberg). Berlin: W. Ernst & Sohn. 1936.

wird. Die Berücksichtigung der Kohäsion des Bodens wird nur gestreift, wobei die Mängel bezüglich der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen bestehen bleiben. Die beiden Diagramme von Fellenius³, Abb. 7 und 20 werden in ein einziges Schaubild gebracht⁵, Abb. 79 d 4, aus dem der Zusammenhang der Kennziffern c und φ für den Fall $S = 1$ bei ebenen Böschungen entnommen werden kann. Zur Berechnung der Sicherheit von Böschungen mit Gleitkreisen durch den Fußpunkt verwendet Krey die Fellenius-Regel⁵, S. 133.

IV. Das Verfahren von D. W. Taylor⁶.

Ähnlich wie Krey betrachtet Taylor das Gleichgewicht des Rutschkörpers mit Hilfe eines Kraftplanes der Resultierenden der äußeren Kräfte und der im Gleitkreisbogen wirkenden Kohäsions- und Reibungsspannungen. Um die abstrakte Annahme der in einem Punkte des Kreisbogens konzentrierten Normalspannungen zu korrigieren, führt er eine sinusoidale Verteilung der Normalspannungen entlang des Gleitkreises in Sichelform ein. Auch hier sind die Gleichgewichtsbedingungen nicht streng erfüllt. Zur Bestimmung der Sicherheit gegen Gleitung verwendet Taylor nicht genau die Fellenius-Regel in der Form der Gl. (4), sondern die etwas abgeänderten Gleichungen

$$\frac{\bar{c}}{\eta} = c, \quad \frac{\bar{\varphi}}{\eta} = \varphi, \quad (5)$$

die jedoch für kleine Reibungswinkel keine nennenswerten Abweichungen von Gl. (4) ergeben. Taylor legt jedoch weniger Wert auf die Entwicklung eines neuen Verfahrens, als vielmehr auf die Bestimmung des Mittelpunktes und des Halbmessers des gefährlichsten Gleitkreises. Die Ergebnisse der Berechnungen Taylors der Fälle $S = 1$ für Böschungen verschiedener Neigungen hat K. Terzaghi⁷, S. 159, Fig. 45, in einem Diagramm zusammengefaßt: waagrecht sind die Böschungsneigungen, lotrecht die sog. Standfestigkeitsziffer

$$\frac{\gamma H_{\text{krit}}}{c}$$

aufgetragen, worin γ das Raumgewicht des Böschungsmaterials, H_{krit} die Böschungshöhe und c die Kohäsion bedeutet. Dasselbe Diagramm (für Gleitkreise durch den Böschungsfußpunkt) läßt sich auch aus den erwähnten Zusammenstellungen von Fellenius und Krey aufbauen. Es dient zur Beurteilung des Sicherheitsgrades von Böschungen unter Benützung der Fellenius-Regel. Dies ist in⁴, S. 14, Bild 2, gezeigt.

V. Die Regel von J. Ohde zur Bestimmung der Sicherheit gegen Gleiten.

Die im vorhergehenden behandelten Verfahren bezwecken, Wertpaare (c, φ) für den Grenzgleichgewichtszustand des Rutschkörpers zu finden. Um zu einem Ausdruck für den Sicherheitsgrad gegen Rutschen zu gelangen, braucht man daher eine wenigstens näherungsweise richtige Beziehung zwischen den vorhandenen Kennwerten \bar{c} , $\bar{\varphi}$ und den durch eine Gleichgewichtsbetrachtung errechneten Werten c und φ , in welcher auch der Sicherheitsgrad S vorkommt. Die Fellenius-Regel Gl. (4) stellt eine solche Brücke dar, die den Sicherheitsgrad $S = \eta$ ergibt. Sie ist, wie schon erwähnt, auf intuitivem Weg entstanden und bedarf eines Berechtigungsnachweises, der später gegeben werden soll. Aus der Tatsache, daß die Wertepaare c, φ für das Grenzgleichgewicht eines Rutschkörpers auf einer Kreiszyylinderfläche mit unveränderlichem Mittelpunkt und Halbmesser Scherdiagramme (s. Abb. 1) ergeben, deren nach

⁶ D. W. Taylor: Stability of Earth Slopes. J. Boston Soc. of C. E. 1937, Nr. 3.

⁷ K. Terzaghi: Theoretical Soil Mechanics. New York: J. Wiley and Sons. Third Printing 1946.

rechts ansteigende Äste sich angenähert in einem Punkt schneiden, stützt Ohde⁸ seine Regel für den Sicherheitsgrad.

In Abb. 2 sind drei Wertepaare der Kennziffern des Böschungsmaterials eingetragen, die den Rutschkörper gerade im Gleichgewicht halten, und zwar

$$(c_{\varphi=0}, 0), \quad (c, \varphi) \quad \text{und} \quad (0, \varphi_{c=0}).$$

Die zu diesen drei Scherdiagrammen gehörigen Geraden 2-A, 1-A und 0-A schneiden sich im Punkt A. In Wirklichkeit ist dieser Punkt ein kleines Gebiet, das näherungsweise als Punkt aufgefaßt werden kann. Der Wert $c_{\varphi=0}$ ist jene Kohäsion, die vorhanden sein muß, wenn das Material keine innere Reibung besitzt. $\varphi_{c=0}$ ist jener Reibungswinkel, der zum Gleichgewicht erforderlich ist, wenn das Material keine Kohäsion besitzt ($c = 0$).

Aus Abb. 2 folgt:

$$c + c_{\varphi=0} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{c=0} \cdot \operatorname{tg} \varphi = c_{\varphi=0}.$$

Dividiert man durch $c_{\varphi=0}$, so erhält man:

$$\frac{c}{c_{\varphi=0}} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_{c=0}} = 1. \quad (6)$$

Die drei Wertepaare, welche zu dem Grenzgleichgewicht $S = 1$ gehören, erfüllen also Gl. (6). Die Summe der Verhältnisse der Kohäsionen und der Reibungsziffern ergibt also die Sicherheit gegen Gleiten. Daraus kann man die Ohde-Regel ableiten:

$$S = \frac{\bar{c}}{c_{\varphi=0}} + \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\operatorname{tg} \varphi_{c=0}}, \quad (7)$$

wenn \bar{c} und $\bar{\varphi}$ die tatsächlichen Kennziffern des Böschungsmaterials bedeuten. Die Werte $c_{\varphi=0}$ und $\varphi_{c=0}$ lassen sich aus zwei einfachen Gleichgewichtsuntersuchungen bestimmen oder sie können aus bestehenden $S = 1$ -Diagrammen für Böschungen und verschiedenen Neigungen entnommen werden.

VI. Wertung der Fellenius- und Ohde-Regel als Definitionen des Sicherheitsgrades gegen Gleitung.

Sowohl die Fellenius- als auch die Ohde-Regel als Definitionen des Sicherheitsgrades aufgefaßt, beruhen auf einer gewissen Willkür und entbehren einer bodenstatistischen Begründung. Trotzdem sind sie in verschiedenen Ländern in Gebrauch. Sie führen angenähert zu gleichen Werten der Sicherheit, wenn man von derselben Verteilung der Normalspannungen im Gleitkreis ausgeht. Diese Werte sind jedoch höher als jene Sicherheit, die man auf Grund einer bodenstatistisch einwandfreien Sicherheitsdefinition erhält.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß beide Regeln nur für den Fall der ebenen Gleitfläche die Bedingungen des Grenzgleichgewichtes erfüllen.

Die auf der ebenen Gleitfläche AB mit der Neigung ϑ liegende Erdmasse mit dem Gewicht R (Abb. 3) besitze die Festigkeitskennwerte \bar{c} und $\bar{\varphi}$. Sie befinde sich nicht im Grenzgleichgewicht und es sei ein Sicherheitsbegriff gegen Gleiten längs AB zu entwickeln. Die in der Gleitfläche vorhandene Kohäsion \bar{c} und die Reibung $\bar{\varphi}$ sind nicht ausgenutzt; sie können jedoch mobilisiert werden, wenn man eine zusätzliche Kraft P_{zus} in die Richtung BA , also mit der Neigung ϑ auf die Erdmasse einwirken läßt und ihre Größe so wählt, daß der Grenzgleichgewichtszustand erreicht

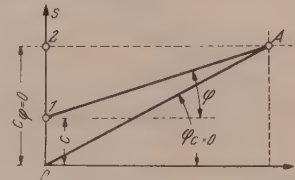


Abb. 2. Zusammenhang der für Gleichgewicht erforderlichen Wertepaare (c, φ) für ein und dieselbe Gleitfläche.

⁸ J. Ohde: Einfache erdstatische Berechnungen der Standsicherheit von Böschungen. Preuß. Versuchsanstalt f. Wasser-, Erd- und Schiffbau, Berlin 1942.

wird. Der so entstehende Gleichgewichtszustand ist durch den Kraftplan Abb. 3b charakterisiert.

Die das Gleiten verhindernden Kräfte sind $R_{\bar{c}}$ (die Resultierende aller Kohäsionskräfte) und $R_{\bar{\varphi}}$ (die Resultierende aller Reibungskräfte). Die zur Gleitung treibenden Kräfte sind $R \cdot \sin \vartheta$ und P_{zus} . Das Verhältnis der widerstehenden zu den treibenden Kräften ist

$$\frac{R_{\bar{c}} + R_{\bar{\varphi}}}{R \cdot \sin \vartheta + P_{\text{zus}}} = 1. \quad (8)$$

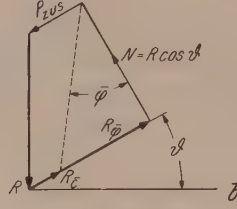
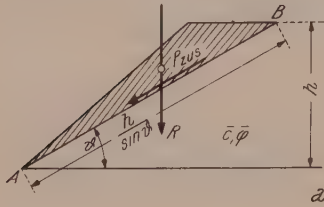


Abb. 3. Zur Definition der Gleitsicherheit bei ebener Gleitfläche.

Unter der Wirkung der zusätzlichen Last P_{zus} wird die Erdmasse in das Grenzgleichgewicht gebracht, daher ist die Sicherheit dann „Eins“. Verringert man P_{zus} , dann steigt der Wert des Quotienten in Gl. (8) und für $P_{\text{zus}} = 0$ beträgt sein Wert

$$\frac{R_{\bar{c}} + R_{\bar{\varphi}}}{R \cdot \sin \vartheta} = S, \quad (9)$$

womit eine Definition der Sicherheit gegen Gleiten längs einer ebenen Gleitfläche gewonnen ist. Zu dem Resultat Gl. (9) gelangt man auch, wenn man die der Gleitung widerstehenden Momente und das treibende Moment um den unendlich fernen Drehpunkt des Rutschkörpers ins Verhältnis setzt.

Es ist:

$$R_{\bar{c}} = \bar{c} \cdot \frac{h}{\sin \vartheta} \quad (10)$$

und

$$R_{\bar{\varphi}} = R \cdot \cos \vartheta \cdot \operatorname{tg} \bar{\varphi}. \quad (11)$$

Setzt man (10) und (11) in (9) ein, so erhält man

$$S = \frac{\bar{c} \cdot h}{R \cdot \sin^2 \vartheta} + \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\operatorname{tg} \vartheta}. \quad (12)$$

Denkt man sich nun die Kennwerte \bar{c} und $\bar{\varphi}$ im selben Verhältnis vermindert, also durch eine Zahl η geteilt, dann vermindert sich im gleichen Maße die Sicherheit, weil die Werte h , R und ϑ konstant bleiben. Um zu dem Grenzfall zu kommen, hat man η so zu wählen, daß

$$\frac{\bar{c} \cdot h}{\eta R \cdot \sin^2 \vartheta} + \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\eta \operatorname{tg} \vartheta} = 1 \quad (12a)$$

wird, das heißt es ist $\eta = S$, womit bewiesen ist, daß die Fellenius-Regel für die ebene Gleitfläche strenge zutrifft.

Geht man für die kreiszylindrische Gleitfläche analog vor, dann sind gewisse Vernachlässigungen erforderlich, um zu der Fellenius-Regel als Sicherheitsdefinition zu kommen. Dies wird in¹, S. 49, gezeigt.

Will man irgendein Wertepaar c , φ errechnen, welches zum Gleichgewicht der Erdmasse erforderlich ist, dann hat man in Gl. (8) $P_{\text{zus}} = 0$ zu setzen und statt \bar{c} , $\bar{\varphi}$ die Werte c , φ einzuführen, also:

$$\frac{R_c + R_{\varphi}}{R \cdot \sin \vartheta} = 1 \quad (13)$$

oder $R_c + R_{\varphi} = R \cdot \sin \vartheta$ zu schreiben.

Für den Sonderfall, daß nur Kohäsion und keine Reibung vorhanden ist (c_{erf} , $\varphi = 0$, $\varphi = 0$) ergibt sich $R_{\varphi} = 0$, und $R_{c_{\text{erf}}, \varphi = 0} = R \cdot \sin \vartheta$. Gl. (12) liefert damit und unter Berücksichtigung von (10)

$$S = \frac{R_c}{R_{c_{\text{erf}}, \varphi = 0}} + \frac{\operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\operatorname{tg} \vartheta}. \quad (14)$$

Nun ist aber ϑ , der Neigungswinkel der Böschung für den Sonderfall, daß keine Kohäsion, sondern nur Reibung vorhanden ist ($c = 0$, $\varphi_{\text{erf}}, c = 0$).

$$\vartheta = \varphi_{\text{erf}}, c = 0.$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (10) kann man Gl. (14) wie folgt schreiben:

$$S = \frac{\bar{c}}{c_{\text{erf}}, \varphi = 0} + \frac{\text{tg } \bar{\varphi}}{\text{tg } \varphi_{\text{erf}}, c = 0}. \quad (15)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (7), woraus folgt, daß die Ohde-Regel für die ebene Gleitfläche zutrifft.

Für die kreiszylindrische Gleitfläche gilt sie nur näherungsweise; dies ist in¹, S. 51, bewiesen.

Beide Regeln gelten also strenge nur für die ebene Gleitfläche, sie werden jedoch in verschiedenen Ländern als Sicherheitsdefinitionen für das Gleitkreisverfahren verwendet. Die Ergebnisse der Sicherheitsberechnungen mit Hilfe der oben behandelten „Regeln“ sind in normalen Fällen von Böschungen bis zu 8% höher als jene mit Benützung einer statisch einwandfreien Sicherheitsdefinition errechneten. Die „Regeln“ sollten daher nur für erste Schätzungen der Gleitsicherheit von Böschungen verwendet werden.

VII. Definition des Sicherheitsgrades für das Gleitkreisverfahren auf bodenstatistischer Grundlage.

Beindet sich der Rutschkörper, das ist jene Erdmasse, die unten von der kreiszylindrischen Gleitfläche und oben von der Geländeoberfläche begrenzt ist, noch nicht im Grenzgleichgewicht, dann sind die durch die Festigkeitsparameter \bar{c} und $\bar{\varphi}$ bestimmten Widerstände nicht ausgenützt. Um sie zu wecken, muß zu den vorhandenen Kräften eine zur Gleitung treibende Kraftwirkung hinzugefügt werden. Für den Fall der ebenen Gleitfläche (Abschnitt VI) war es am zweckmäßigsten, eine Zusatzkraft P_{zus} einzuführen. — Für den Fall der kreiszylindrischen Gleitfläche ist es naheliegend, ein Moment M_{zus} auf den Rutschkörper einwirken zu lassen und seine Größe so zu wählen, daß der Grenzgleichgewichtszustand gerade erreicht wird (s. Abb. 4).

Die dann in der Gleitfläche zur vollen Größe geweckten Widerstände sind $R_{\bar{c}}$ und $R_{\bar{\varphi}}$ (Kohäsion und Reibung), die mit der Resultierenden R der äußeren Kräfte und der Resultierenden N aller Normalspannungen σ in der Gleitfläche Gleichgewicht halten müssen. Der Kraftplan (Abb. 4b) ist geschlossen, daher sind die Gleichgewichtsbedingungen $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ erfüllt. Um auch die dritte Bedingung $\sum M = 0$ zu befriedigen, muß zu den Kräften R , $R_{\bar{c}}$, $R_{\bar{\varphi}}$ und N ein um O rechts drehendes Moment $M_{\text{zus}} = R \cdot e$ hinzugefügt werden, worin e den Abstand des Punktes $3'$ (Abb. 4a) von R bedeutet. Das Verhältnis der der Gleitung widerstehenden Momente zu den die Gleitung verursachenden Momenten ist:

$$\frac{R_{\bar{c}} \cdot \varrho_{\bar{c}} + R_{\bar{\varphi}} \cdot \varrho_{\bar{\varphi}}}{R \cdot a + M_{\text{zus}}} = 1. \quad (16)$$

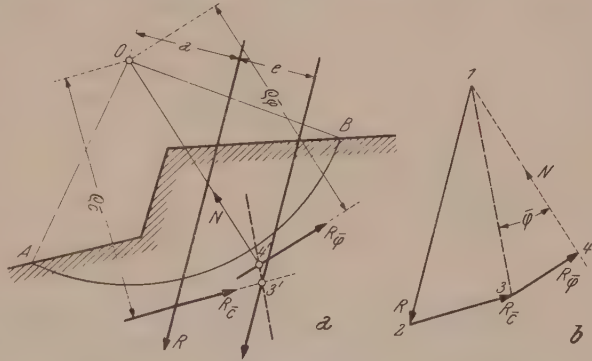


Abb. 4. Zur Definition der Gleitsicherheit bei kreiszylindrischer Gleitfläche.

Da die Sicherheit für den Fall des Grenzgleichgewichtes gleich „Eins“ ist, führt der Quotient in Gl. (16) auf eine Definition der Sicherheit. Verringert man M_{zus} , dann steigt der Wert des Quotienten in Gl. (16) und für $M_{\text{zus}} = 0$ wird sein Wert

$$\frac{R_c \cdot c_c + R_{\varphi} \cdot c_{\varphi}}{R a} = S. \quad (17)$$

Zieht man (16) und (17) zusammen, dann folgt:

$$S = 1 + \frac{M_{\text{zus}}}{R a}, \quad (18)$$

worin S die Sicherheit gegen Gleiten einer Erdmasse auf kreiszylindrischer Gleitfläche darstellt. Mit $M_{\text{zus}} = R e$ läßt sich die Sicherheit durch

$$S = 1 + \frac{e}{a} \quad (18a)$$

ausdrücken (e und a sind aus Abb. 4a zu entnehmen).

Diese bodenstatistisch begründete Definition der Sicherheit führt auf ein einfaches direktes Verfahren zur Beurteilung der Rutschgefahr und gestattet die Berücksichtigung der Verteilung der Normalspannungen über den Gleitkreis; es beherrscht daher den ganzen Bereich der statischen Unbestimmtheit des Problems. Die graphische und analytische Lösung nach diesem Verfahren ist in ⁹ eingehend beschrieben.

VIII. Angenäherte Bestimmung des Sicherheitsgrades gegen Gleiten einer Böschung auf kreiszylindrischer Gleitfläche durch den Böschungsfußpunkt mit Hilfe der indirekten Verfahren und der in den Abschnitten II und V behandelten „Regeln“.

Die in der Erdbaupraxis am häufigsten vorkommenden Gleituntersuchungen beziehen sich auf ebene Böschungen mit im oberen Rand anschließendem waagrechtem Gelände. Aus dem Schrift-

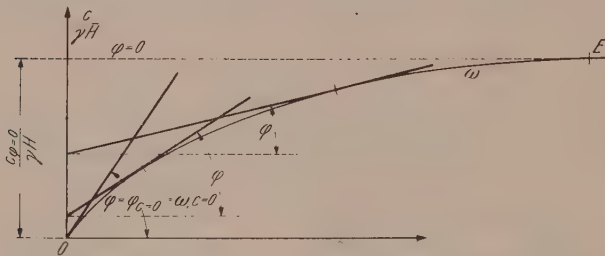


Abb. 5. Hüllkurve ω der φ -Strahlen, die zu Wertepaaren (φ, c) einer im Grenzgleichgewicht befindlichen ebenen Böschung gehören, deren kritische Gleitflächen durch den Böschungsfuß gehen.

tum^{3, 4, 5, 7} sind Diagramme von „ $S = 1$ “-Fällen bekannt, welche die Beziehungen zwischen der Böschungsneigung ω , der Höhe H und dem wirksamen Raumgewicht γ und den Festigkeitsparametern c und φ darstellen. Ihre Anwendung zur Feststellung der Sicherheit mit Hilfe von „Regeln“ erfordert Proberechnen mit angenommenen Sicherheitsgraden (s. ⁴, S. 14, Bild 2). Durch ge-

eignete Umgestaltung dieser Diagramme kommt man zu einer Darstellung, welche eine direkte, äußerst anschauliche Anwendung der Fellenius- und der Ohde-Regel gestattet. Man erhält dabei rasch Näherungswerte für den Sicherheitsgrad einer Böschung gegen Gleiten, die für eine erste Beurteilung der Rutschgefahr in einfachen Fällen hinreichen.

Zu einer Böschung mit der Neigung ω , der Höhe H und dem Raumgewicht γ gehören unendlich viele Wertepaare c, φ , welche den Rutschkörper über der ungünstigsten Gleitfläche im Gleichgewicht halten, also die Bedingung $S = 1$ erfüllen. Trägt man den Quotienten $\frac{c}{\gamma H}$ als Strecke auf einer Vertikalen von O aus auf und

⁹ O. K. Fröhlich: Sicherheit gegen Rutschung einer Erdmasse auf kreiszylindrischer Gleitfläche mit Berücksichtigung der Spannungsverteilung in dieser Fläche. Beiträge zur angewandten Mechanik, Federhofer-Girkmann-Festschrift. Wien: F. Deuticke, 1950.

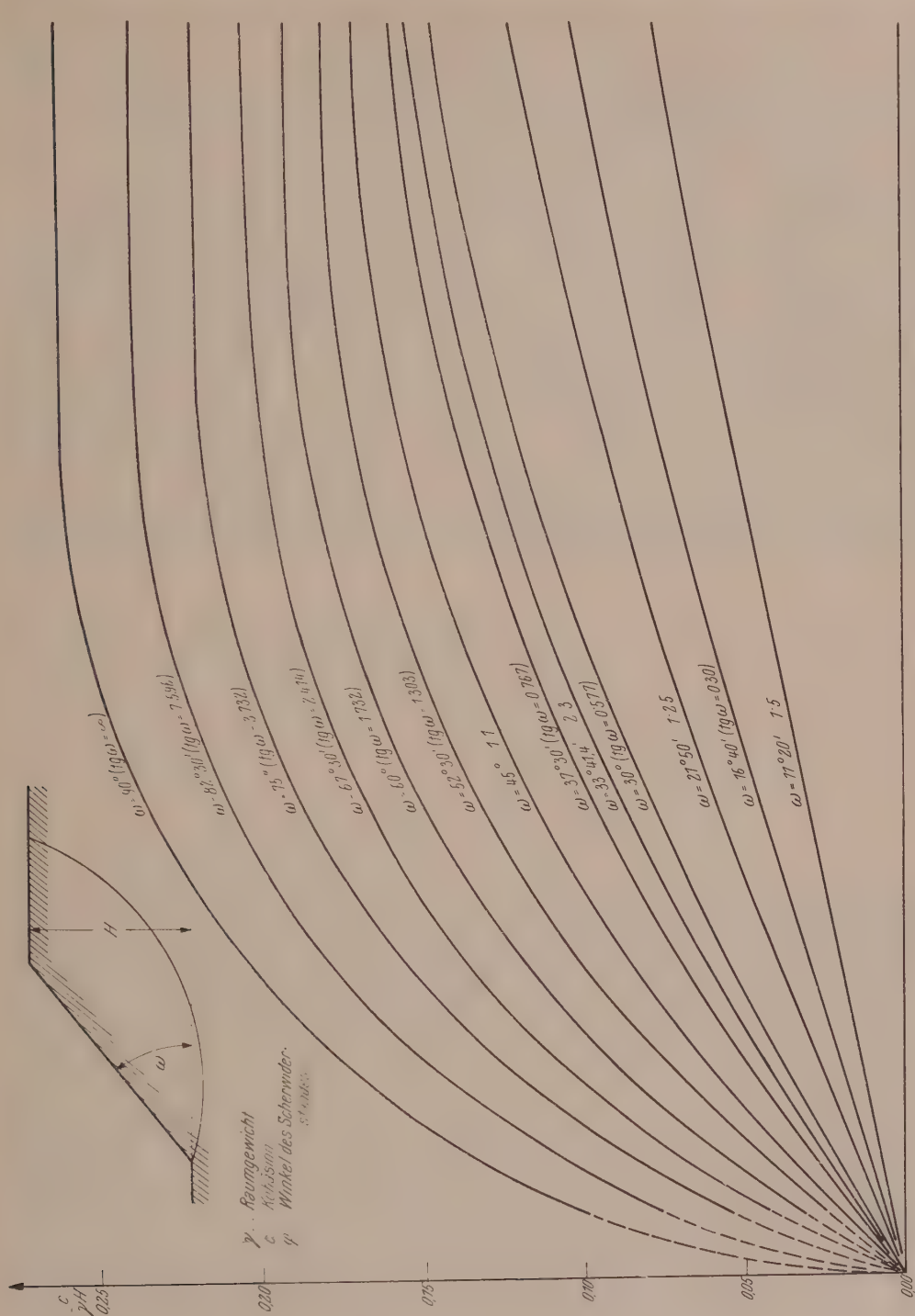


Abb. 6. Diagramm der Hüllkurven ω der φ -Strahlen, die zu Wertepaaren (φ, c) von im Gleichgewicht befindlichen ebenen Böschungen mit den Neigungen ω gehören, deren kritische Gleitflächen durch den Böschungsfuß gehen.

zieht durch den oberen Endpunkt der Strecke eine unter φ geneigte Gerade, so erhält man eine Art Scherdiagramm (Abb. 5).

c und φ beziehen sich auf die ungünstigste Gleitfläche. Wiederholt man diese Auftragung für mehrere Wertepaare c, φ , so umhüllen die unter φ geneigten Geraden

eine Kurve, die zu dem Böschungswinkel ω gehört. Jedem Punkt des Kurvenstückes OE entspricht ein Wertepaar c, φ , welches das Grenzgleichgewicht ($S = 1$) der Böschung ω gewährleistet. Der Anfangspunkt O der Kurve entspricht dem Wertepaar $c = 0, \varphi = \varphi_{c=0}$ (reine Reibung, ohne Kohäsion), der Endpunkt dem Wertepaar $c_{\varphi=0}, \varphi = 0$ (reine Kohäsion ohne Reibung).

In der Literatur⁷ findet sich der dimensionslose Wert $\frac{\gamma H}{c}$ als „Stabilitätsfaktor“, während hier der Quotient $\frac{c}{\gamma H}$ verwendet wird (reziproker Stabilitätsfaktor).

In dem Diagramm Abb. 6 wurden die Einhüllenden für die Böschungsneigungen $\omega = 33^\circ, 33^\circ 41' 4'', 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ aus den im Schrifttum bekannten Wertepaaren c, φ konstruiert. Im folgenden soll die Anwendung dieses Diagramms, dessen Kurvenschar für die Praxis durch Interpolation noch verdichtet wurde, auf die angenäherte Berechnung des Sicherheitsgrades gegen Rutschen gezeigt werden.

Die Böschung besitze die Neigung ω und die Höhe H . In Abb. 7 ist die dazu gehörige ω -Kurve OE eingezeichnet. Das Rutschkörpermaterial besitze die Festigkeitskennwerte \bar{c} und $\bar{\varphi}$ und das Raumgewicht γ . Mit Hilfe des Quotienten $\frac{\bar{c}}{\gamma H}$ und des Winkels $\bar{\varphi}$ des Scherwiderstandes läßt sich das reduzierte Scherdiagramm in Abb. 7 eintragen (OAB). Die Fellenius-Regel sucht jene Zahl, durch die \bar{c} und $\tan \bar{\varphi}$ dividiert

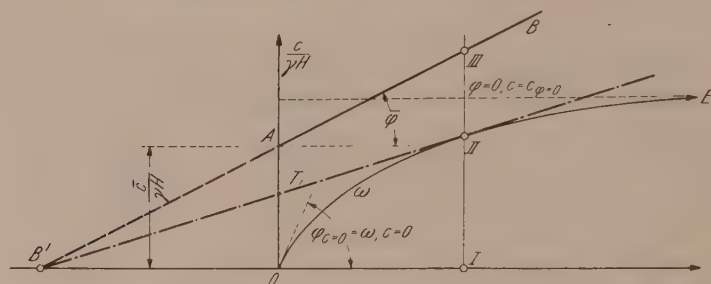


Abb. 7. Anwendung des Diagramms Abb. 6 mit Hilfe der Fellenius-Regel.

werden müssen, um auf ein Grenzgleichgewichtswertepaar c, φ zu kommen. Diese Zahl kann nun durch eine einfache Konstruktion in Abb. 7 gefunden werden. Man verlängert AB bis zum Schnittpunkt B' mit der Waagrechten durch O und zieht von B' eine Tangente T an die Kurve OE mit dem Berührungspunkt II . Die Lotrechte durch II trifft die Waagrechte $B'O$ in I und die geneigte Gerade AB in III . Das Verhältnis $\frac{I, III}{I, II}$ ist die gesuchte Zahl, also der Sicherheitsgrad nach der Fellenius-Regel.

Um die Ohde-Regel Gl. (7) auf das Diagramm Abb. 6 anzuwenden, hat man sich vor Augen zu halten, daß ihre Ableitung auf die Annahme einer festen Gleitfläche (Lage des Gleitkreismittelpunktes fest, Radius des Kreisbogens konstant) aufgebaut war. Die ω -Kurven im Diagramm Abb. 6 gelten jedoch für die ungünstigsten Gleitflächen, die zu einem beliebigen Grenzgleichgewichtswertepaar c, φ passen. Schreitet man von einem Punkt der ω -Kurve zu einem benachbarten Punkt, so ändert sich, wenn auch in geringem Maße, die Form und Lage der Gleitfläche. So entspricht der Endpunkt E der ω -Kurve in Abb. 7 der kreiszylindrischen Gleitfläche für rein kohärentes Material ($\varphi = 0, c = c_{\varphi=0}$), dagegen der Anfangspunkt O der ebenen Gleitfläche für reines Reibungsmaterial ($c = 0, \varphi_{c=0} = \omega$). Die Ohde-Regel gibt keinen Anhaltspunkt dafür, welcher Punkt der ω -Kurve der Gl. (7) zugrunde zu legen ist. Dies stellt eine Schwäche dieser Regel gegenüber der Fellenius-Regel

werden sollen. Diese Anwendung wird an anderer Stelle gezeigt werden. Schließlich kann das Diagramm Abb. 6 auch Verwendung finden, wenn man einen angenäherten Wert der Gleitsicherheit auf Grund der bodenstatisch einwandfreien Definition Gl. (18) rasch ermitteln will. Sucht man in Abb. 9 den Punkt *II* auf der ω -Kurve z. B. nach der Fellenius-Regel auf und trägt die Bögen *JK* und *LM* mit den Zentriwinkeln $\bar{\varphi}$ bzw. φ und den Mittelpunkten *A* bzw. *D* ein, dann ist die Gleitsicherheit nach Gl. (18) mit sehr guter Annäherung gleich dem Verhältnis der lotrechten Strecken *KP* und *MN*. Dieser Wert ist für $\bar{\varphi} > 0$ immer kleiner als jener, der aus einer der beiden Regeln folgt.

IX. Vereinfachte Verfahren, die auf der Definition der Gleitsicherheit als Quotient der Summe der widerstehenden und der treibenden Momente beruhen.

In verschiedenen Ländern begnügt man sich mit der Aufstellung der der Rutschung widerstehenden Momente aus Reibung und Kohäsion, die man durch eine willkürliche Zerlegung der Eigengewichte der lotrechten Lamellen erhält, und setzt sie ins Verhältnis zu dem treibenden Moment des Gesamteigengewichtes um den Gleitkreismittelpunkt. Dieser Quotient

$$S = \frac{M_{\text{widerstehend}}}{M_{\text{treibend}}}$$

wird in Übereinstimmung mit Gl. (17) als Sicherheitsgrad gegen Gleitung angesehen, jedoch ohne die Bedingungen für das Grenzgleichgewicht Gl. (3) zu beachten.

Diese Verfahren können zu größeren Fehlern in der Beurteilung der Rutschgefahr führen und sollten für Lösung verantwortungsvoller Aufgaben nicht verwendet werden.

Berücksichtigt man die Bedingungen Gl. (3) mit Beibehaltung der Definition für *S*, so gelangt man zu dem Verfahren Schrifttum⁹, dessen Kritik den Benützern desselben überlassen werden möge. Es wurde in Abschnitt VII kurz erläutert.

(Eingegangen am 10. Mai 1955.)

Geschweißter Anschluß eines zugbeanspruchten Flachstabes bei behinderter Verformung.

Von K. Girkmann, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird die Spannungsverteilung in einem auf Zug beanspruchten Flachstahl ermittelt, der durch eine Stumpfschweißung (K-Naht) an einen starr gedachten Bauteil angeschlossen ist. Die Aufgabe wird als ebenes Problem gelöst. Anschließend wird unter Zugrundelegung verschiedener Dehnzahlen für Konstruktionsmaterial und Nahtwerkstoff der Stumpfstöß eines zugbeanspruchten Flachstahles behandelt.

Summary. The author determines the stress distribution in a flat-bar steel subjected to tensile stress, and connected to a rigid member by means of a butt weld (K-seam), the problem being considered as a plane problem. Furthermore, the butt joint of a flat-bar steel subjected to tensile stress is dealt with under the assumption of different extension coefficients for the structure and seam materials.

Résumé. On détermine la répartition de la tension sur un acier section rectangle soumis à des forces de traction, et raccordé par une soudure par rapprochement (joint en K) à un élément de construction supposé rigide. On traite ensuite, en se basant sur différents coefficients d'extension pour les matériaux de construction et de soudure, de la soudure par rapprochement d'un acier section rectangle soumis à des forces de traction.

I. Einleitung.

Die Abb. 1 zeigt einen auf Zug beanspruchten Flachstahl, der durch eine Stumpfnahht an einen als starr betrachteten Bauteil angeschlossen ist. Es wird angenommen, daß die auf Blechdicke abgearbeitete Naht einwandfreie Beschaffenheit aufweist und daß der Nahtwerkstoff die gleichen elastischen Eigenschaften wie der Werkstoff des Stabes besitzt. Um die Idealisierung auf ein ebenes Problem zu ermöglichen, wird vorausgesetzt, daß die Blechdicke sehr klein gegenüber der Stabbreite ist und daher die in z -Richtung wirkenden Spannungskomponenten vernachlässigt werden dürfen. Es gelte das Hookesche Elastizitätsgesetz und es seien keine Eigenspannungen vorhanden.

Zwei ähnliche Probleme sind bereits behandelt worden^{1, 2}, wobei aber grundverschiedene Ergebnisse erhalten wurden. Die folgende Untersuchung soll diesen Widerspruch klären; sie wird ganz allgemein durchgeführt, ohne im vorhinein an bestimmten Orten das Auftreten irregulärer Spannungszustände vorauszusetzen¹ oder auszuschließen².

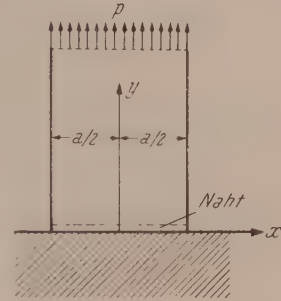


Abb. 1.

II. Ermittlung der Spannungsfunktion.

Der Flachstahl wird als Halbstreifen aufgefaßt; seine Dicke sei gleich der Längeneinheit. Die den Spannungszustand beschreibende Airysche Funktion wird aus drei Teilen zusammengesetzt:

$$F = F_0 + F_1 + F_2. \quad (1)$$

F_0 entspricht dem gleichmäßigen Zug p in Richtung y :

$$F_0 = \frac{1}{2} p x^2, \quad \text{mit } \sigma_{x0} = 0, \quad \sigma_{y0} = p, \quad \tau_0 = 0. \quad (2)$$

Der Teil F_1 wird in Reihenform gewählt:

$$F_1 = \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} B_n \left(-\frac{1-\mu}{1+\mu} + \alpha_n y \right) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \infty \quad (3)$$

Die B_n sind Freiwerte. Diese Spannungsfunktion erfüllt bereits die Randbedingung $v = 0$ in $y = 0$. Die zugehörigen Spannungskomponenten lauten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= \sum_n B_n \left(-\frac{3+\mu}{1+\mu} + \alpha_n y \right) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \\ \sigma_{y1} &= \sum_n B_n \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha_n y \right) e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x, \\ \tau_{11} &= \sum_n B_n \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha_n y \right) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Der Anteil F_2 wird in Form eines Fourierschen Integrales angesetzt:

$$F_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (C \operatorname{Co}[\beta x + \beta x D \operatorname{Sin} \beta x) \cos \beta y d\beta \quad (5)$$

¹ M. Knein: Zur Theorie des Druckversuchs. Abhandl. Aerodyn. Inst. T. H. Aachen H. 7 (1927).

² K. Ježek: Die Spannungsverteilung in geschweißten Stumpfstößen. Stahlbau 11, 111 (1938).

³ K. Girkmann: Flächentragwerke, 3. Aufl., S. 119, 120. Wien: Springer-Verlag. 1954.

mit den zugehörigen Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_2} &= - \int_0^\infty (C \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta x + \beta x D \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta x) \cos \beta y d\beta, \\ \sigma_{y_2} &= \int_0^\infty [(C + 2D) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta x + \beta x D \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta x] \cos \beta y d\beta, \\ \tau_2 &= \int_0^\infty [(C + D) \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta x + \beta x D \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta x] \sin \beta y d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Größen C und D stellen Funktionen von β dar.

Da F_2 eine gerade Funktion von y ist, liefert sie für $y = 0$ die Verschiebungen $v = 0$, so daß die Randlinie $y = 0$ des Halbstreifens gerade bleibt. Die noch zu erfüllenden Randbedingungen lauten:

$$\text{in } x = \pm \frac{1}{2} a \text{ ist } (\sigma_x)_{x = \frac{1}{2} a} = 0 \quad \text{und} \quad (\tau)_{x = \frac{1}{2} a} = 0; \quad (7)$$

$$\text{in } y = 0 \text{ ist } (\varepsilon_x)_{y=0} = 0. \quad (8)$$

Nachdem in $x = \pm \frac{1}{2} a$ bereits σ_{x_0} und σ_{x_1} Null sind, lautet die Bedingung (7/1):

$$(\sigma_{x_2})_{x = \frac{1}{2} a} = 0;$$

mit (6) folgt hieraus

$$C = -D \frac{\beta a}{2} \mathfrak{T} \mathfrak{g} \frac{\beta a}{2}. \quad (9)$$

Um die Bedingung (7/2) erfüllen zu können, muß die Randspannung $(\tau_1)_{x = \frac{1}{2} a}$ durch ein Fourier-Integral dargestellt werden. Hierzu dienen die Ausdrücke⁴

$$e^{-\alpha_n y} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} \sin \beta y d\beta, \quad y e^{-\alpha_n y} = \frac{4 \alpha_n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \sin \beta y d\beta. \quad (10)$$

Man erhält dann als Bedingung (7/2)

$$\begin{aligned} (\tau)_{x = \frac{1}{2} a} &= \int_0^\infty \sin \beta y d\beta \left[\frac{4}{\pi(1+\mu)} \sum_n \frac{\beta(\beta^2 - \mu \alpha_n^2)}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} B_n \sin \frac{n\pi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{\beta a}{2}} \left(\frac{\beta a}{2} + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \frac{\beta a}{2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{\beta a}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Diese Beziehung muß für jedes y bestehen und damit ergibt sich

$$D = - \frac{8}{a \pi (1+\mu)} \frac{\beta a \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{\beta a}{2}}{\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta a + \beta a} \sum_n \frac{\beta^2 - \mu \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} B_n \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (11)$$

Zur Aufstellung der Randbedingung (8) wird der Ausdruck für $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$ in $y = 0$ benötigt. F_0 ergibt den Beitrag

$$E (\varepsilon_{x_0})_{y=0} = -\mu p = -\frac{4\mu p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha_n x, \quad (a)$$

⁴ S. Fußnote 3, Gl. (117).

wobei p durch eine Fourier-Reihe mit der Periode $L = 2a$ als gerade Funktion von x dargestellt wurde⁵. Mit (4) erhält man den Beitrag von F_1 :

$$E(\varepsilon_{x1})_{y=0} = -(3 - \mu) \sum_n B_n \cos \alpha_n x. \quad (b)$$

Mit (6) und (9) bekommt man schließlich von F_2

$$E(\varepsilon_{x2})_{y=0} = \int_0^\infty \left\{ \left((1 + \mu) \frac{\beta a}{2} \Im g \frac{\beta a}{2} - 2\mu \right) \mathfrak{Cof} \beta x - (1 + \mu) \beta x \mathfrak{Sin} \beta x \right\} D d\beta. \quad (c)$$

In (c) für $\mathfrak{Cof} \beta x$ und $x \mathfrak{Sin} \beta x$ die Reihendarstellungen⁶

$$\mathfrak{Cof} \beta x = \frac{4}{a} \mathfrak{Cof} \frac{\beta a}{2} \sum_n \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha_n x,$$

$$x \mathfrak{Sin} \beta x = 2 \sum_n \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \left(\mathfrak{Sin} \frac{\beta a}{2} - \frac{4\beta}{a} \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta^2} \mathfrak{Cof} \frac{\beta a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha_n x$$

eingeführt und alle Beiträge zu $E(\varepsilon_x)_{y=0}$ zusammengefaßt, folgt aus (8)

$$\sum_n \left(\frac{4\mu p}{n\pi} + \frac{3-\mu}{\sin \frac{n\pi}{2}} B_n + \frac{8}{a} \int_0^\infty D \frac{\alpha_n (\mu \alpha_n^2 - \beta^2)}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \mathfrak{Cof} \frac{\beta a}{2} d\beta \right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha_n x = 0. \quad (12)$$

Diese Gleichung muß für jedes x erfüllt sein. Setzt man für D den Ausdruck (11) ein, wobei k statt n als Laufzahl der Summe gewählt wird, so gelangt man mit

$$\beta = \frac{t}{a}, \quad d\beta = \frac{dt}{a} \quad (13)$$

zu den folgenden Bestimmungsgleichungen für die Konstanten B_n :

$$\frac{4\mu p}{n\pi} + \frac{3-\mu}{\sin \frac{n\pi}{2}} B_n + \frac{32n}{1+\mu} \int_0^\infty \frac{t(1 + \mathfrak{Cof} t)}{\mathfrak{Sin} t + t} \frac{t^2 - \mu n^2 \pi^2}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \sum_k \frac{t^2 - \mu k^2 \pi^2}{(k^2 \pi^2 + t^2)^2} B_k \sin \frac{k\pi}{2} dt = 0. \quad (14)$$

III. Ermittlung der Spannungen zur Teilfunktion F_1 .

Mit Einführung der Hilfsfunktion

$$\Phi = \frac{t^2 - \mu n^2 \pi^2}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \frac{t^2 - \mu k^2 \pi^2}{(k^2 \pi^2 + t^2)^2} \quad (15)$$

lauten die Gl. (14)

$$\frac{4\mu p}{n\pi} + \frac{3-\mu}{\sin \frac{n\pi}{2}} B_n + \frac{32n}{1+\mu} \sum_k B_k \sin \frac{k\pi}{2} \int_0^\infty \frac{t(1 + \mathfrak{Cof} t)}{\mathfrak{Sin} t + t} \Phi dt. \quad (16)$$

Das Integral wird zerlegt in

$$\int_0^\infty \frac{t(1 + \mathfrak{Cof} t)}{\mathfrak{Sin} t + t} \Phi dt = \int_0^\infty t \Phi dt + \int_0^\infty \left(\frac{t(1 + \mathfrak{Cof} t)}{\mathfrak{Sin} t + t} - t \right) \Phi dt, \quad (d)$$

wobei der erste Anteil geschlossen ausgerechnet werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty t \Phi dt &= \frac{1}{2\pi^2 (n^2 - k^2)^3} \left((1 + \mu)^2 (n^4 - k^4) - \right. \\ &\quad \left. - [2(1 + \mu^2) n^2 k^2 + \mu (n^2 + k^2)^2] \ln \frac{n^2}{k^2} \right), \quad n \neq k, \\ \text{und} \quad \int_0^\infty t \Phi dt &= \frac{1 - \mu + \mu^2}{6 n^2 \pi^2}, \quad n = k. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

⁵ S. Fußnote 3, Gl. (111).

⁶ S. Fußnote 3, S. 218, Gl. (a), (b).

Der zweite Anteil hingegen mußte numerisch ausgewertet werden. Die so erhaltenen Beiträge waren ungleich kleiner als die Anteile $\int_0^\infty t \Phi dt$ und durften gegenüber diesen vernachlässigt werden. Daher konnte gesetzt werden:

$$\int_0^\infty \frac{t(1 + \mathfrak{E} \mathfrak{O} t)}{\mathfrak{E} \sin t + t} \Phi dt = \int_0^\infty t \Phi dt. \quad (f)$$

Mit (e) und (f) liefert (16) ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten B_n , in welchem die Diagonalglieder die übrigen Glieder derart überwiegen, daß mit dem ersten Iterationsschritt für den vorliegenden Zweck bereits ausreichende Näherungswerte erhalten wurden. Damit blieb von der Summe mit der Laufzahl k jeweils nur das Glied $k = n$ bestehen. Mit Benützung der zweiten Gl. (e) wurde sodann aus (16) erhalten

$$\frac{4\mu p}{n\pi} + \frac{3-\mu}{\sin \frac{n\pi}{2}} B_n + \frac{32n}{1+\mu} \frac{1-\mu+\mu^2}{6n^2\pi^2} B_n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

und weiterhin

$$B_n = - \frac{4\mu p}{(3-\mu)\pi} \frac{1}{n + \frac{16}{3\pi^2} \frac{1-\mu+\mu^2}{(1+\mu)(3-\mu)}} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (17)$$

Mit den Hilfsgrößen

$$b = \frac{4\mu}{(3-\mu)\pi}, \quad c = \frac{16}{3\pi^2} \frac{1-\mu+\mu^2}{(1+\mu)(3-\mu)} \quad (18)$$

kann geschrieben werden

$$B_n = - \frac{b p}{n+c} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (19)$$

Damit folgt aus den Gl. (4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= b p \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} S_1 - \frac{\pi y}{a} S_2 \right), & \sigma_{y1} &= -b p \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} S_1 - \frac{\pi y}{a} S_2 \right), \\ \tau_1 &= -b p \left(\frac{2}{1+\mu} S_3 - \frac{\pi y}{a} S_4 \right), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{a}}{n+c} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, & S_2 &= \sum_n \frac{n \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{a}}{n+c} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \\ S_3 &= \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{a}}{n+c} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, & S_4 &= \sum_n \frac{n \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{a}}{n+c} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$n = 1, 3, 5 \dots \infty$

Die Reihen S_1 bis S_4 können jeweils in einen geschlossen darstellbaren Anteil und in eine genügend rasch konvergierende Reihe zerlegt werden. Die Durchführung der Rechnung wird für S_1 gezeigt. Mit

$$\frac{1}{n+c} = \frac{1}{n} - \frac{c}{n(n+c)} \quad (g)$$

entsteht

$$S_1 = R_1 - c \sum_n \frac{1}{n(n+c)} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \quad (22)$$

wobei

$$R_1 = \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

Die zweite Summe im Ausdruck für S_1 konvergiert auch an der Stelle $y = 0$ noch verhältnismäßig rasch (c ist klein, für $\mu = 0.3$ ergibt sich $c = 0.1216$). R_1 wird zunächst zerlegt gemäß

$$R_1 = \frac{1}{2} \left[\sum_n \frac{1}{n} \sin n \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) e^{-\frac{n \pi y}{a}} + \sum_n \frac{1}{n} \sin n \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) e^{-\frac{n \pi y}{a}} \right]. \quad (\text{h})$$

Nun ist⁷

$$\sum_n \frac{1}{n} Y^n \sin n \xi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y \sin \xi}{1 - Y \cos \xi}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty;$$

ξ und Y sind von n unabhängige reine Funktionen von x bzw. y . Den gleichen Summenausdruck für $-Y$ angeschrieben und vom ersten abgezogen, folgt

$$2 \sum_n \frac{1}{n} Y^n \sin n \xi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y \sin \xi}{1 - Y \cos \xi} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y \sin \xi}{1 + Y \cos \xi}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \infty$$

Mit

$$\xi = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right) \quad \text{bzw.} \quad \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \quad \text{und mit} \quad Y = e^{-\frac{\pi y}{a}}$$

erhält man aus (h)

$$R_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 e^{-\frac{\pi y}{a}} \cos \frac{\pi x}{a}}{1 - e^{-\frac{2 \pi y}{a}}}. \quad (23)$$

Damit können nun die Reihensummen S_1 ausgewertet werden.

Zur Berechnung von S_2 wird zunächst gemäß

$$\frac{n}{n+c} = 1 - \frac{c}{n+c} \quad (\text{i})$$

zerlegt:

$$S_2 = R_2 - c S_1, \quad (24)$$

wobei die Hilfssumme $R_2 = \sum_n \sin \frac{n \pi}{2} \cos \frac{n \pi x}{a} e^{-\frac{n \pi y}{a}}$, ähnlich wie R_1 , geschlossen dargestellt werden kann. Hierzu wird die Beziehung⁷

$$\sum_n Y^n \sin n \xi = \frac{Y \sin \xi}{1 - 2 Y \cos \xi + Y^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

verwendet; sie führt zu

$$R_2 = \frac{\left(1 + e^{-\frac{2 \pi y}{a}}\right) e^{-\frac{\pi y}{a}} \cos \frac{\pi x}{a}}{\left(1 + e^{-\frac{2 \pi y}{a}}\right)^2 - 4 e^{-\frac{2 \pi y}{a}} \sin^2 \frac{\pi x}{a}}. \quad (25)$$

Damit sind also die Summen S_2 bestimmt.

Nachdem hier τ nur für die Stelle $y = 0$ ermittelt wird, genügt die Ausrechnung der Summe $(S_3)_{y=0}$ von (20). Diese wird gemäß (g) zerlegt in

$$(S_3)_{y=0} = R_3 - c \sum_n \frac{1}{n(n+c)} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{n \pi x}{a}, \quad (26)$$

wobei

$$R_3 = \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{n \pi x}{a}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \infty$$

⁷ F. Tölke: Praktische Funktionenlehre, Bd. I, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1950.

Mit Benützung der Beziehungen⁷

$$\sum_n \frac{1}{n} \cos n \xi = -\frac{1}{2} \ln 2 (1 - \cos \xi), \quad \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \cos n \xi = -\frac{1}{2} \ln 2 (1 + \cos \xi),$$

$$n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

erhält man auf dem früher beschrittenen Wege

$$R_3 = -\frac{1}{4} \ln \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{a}}{1 + \sin \frac{\pi x}{a}}, \quad (27)$$

womit auch die Auswertung von $(\tau_1)_{y=0}$ leicht durchzuführen ist.

IV. Ermittlung der Spannungen zur Teilfunktion F_2 .

Mit dem Ausdruck B_n nach (19) entsteht aus (11), bei Berücksichtigung von $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$ nach (3), mit Benützung der neuen Veränderlichen

$$\gamma = \frac{\beta a}{\pi}, \quad (28)$$

sowie unter Beachtung von $\frac{\beta^2 - \mu \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta^2} - \frac{(1 + \mu) \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2}$,

$$D = \frac{8 b a p}{(1 + \mu) \pi^3} \frac{\beta a \Im \left[\frac{\beta a}{2} \right]}{\sin \beta a + \beta a} \sum_n \frac{1}{n + c} \left(\frac{1}{n^2 + \gamma^2} - \frac{(1 + \mu) n^2}{(n^2 + \gamma^2)^2} \right). \quad (29)$$

Die Auswertung der hier auftretenden Reihen

$$S_5 = \sum_n \frac{1}{n + c} \frac{1}{n^2 + \gamma^2} \quad \text{und} \quad S_6 = \sum_n \frac{1}{n + c} \frac{n^2}{(n^2 + \gamma^2)^2}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \infty$$

erfolgte in der Weise, daß jeweils die beiden ersten Glieder für sich ermittelt und die Summen der übrigen Glieder durch Integrale ersetzt wurden:

$$\left. \begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{(1+c)(1+\gamma^2)} + \frac{1}{(3+c)(9+\gamma^2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(5+c)(25+\gamma^2)} + J_1 \right), \\ S_6 &= \frac{1}{(1+c)(1+\gamma^2)^2} + \frac{9}{(3+c)(9+\gamma^2)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{25}{(5+c)(25+\gamma^2)^2} + J_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int_5^\infty \frac{dn}{(n+c)(n^2+\gamma^2)} = \frac{1}{c^2+\gamma^2} \left(\frac{\pi c}{2\gamma} + \frac{1}{2} \ln \frac{25+\gamma^2}{(5+c)^2} - \frac{c}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{\gamma} \right), \\ J_2 &= \int_5^\infty \frac{n^2 dn}{(n+c)(n^2+\gamma^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2(c^2+\gamma^2)^2} \left[\frac{(c^2+\gamma^2)(5c+\gamma^2)}{25+\gamma^2} + c^2 \ln \frac{25+\gamma^2}{(5+c)^2} + \frac{c}{\gamma} (c^2-\gamma^2) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Zur Kontrolle wurde für verschiedene Werte γ mit der Integration erst bei $n = 9$ begonnen; die zahlenmäßige Ausrechnung führte zu sehr wenig abweichenden Ergebnissen.

Drückt man die Hilfsvariable γ gemäß (28) wieder durch β aus und führt man die Ergebnisse für S_5 und S_6 nach (30) und (31) in (29) ein, so ist die Parameterfunktion D und damit, gemäß (9), auch C bestimmt. Weiterhin können nun die der Spannungsfunktion F_2 entsprechenden Spannungskomponenten σ_{x2} , σ_{y2} und τ_2 aus den Gl. (6) berechnet werden. Die Integrale müssen hierbei numerisch ausgewertet werden.

V. Ergebnisse.

Die numerische Ausrechnung der Spannungskomponenten zur Spannungsfunktion F nach Gl. (1) wurde unter Zugrundelegung der Querdehnungszahl $\mu = 0.3$ durchgeführt. In Abb. 2a ist der Verlauf der Spannungen σ_x , σ_y und τ für den Anschlußquerschnitt dargestellt. In Übereinstimmung mit den auf ganz anderem Wege erhaltenen Ergebnissen von Knein¹ werden die Spannungen σ_y in den Randpunkten $x = \pm \frac{1}{2}a$, $y = 0$ unendlich groß und dort wird der Spannungszustand irregulär: nähert man sich diesen Punkten längs $y = 0$, so nehmen auch die Spannungen σ_x und τ unbegrenzt zu (Abb. 2a); erfolgt hingegen die Annäherung längs der Ränder $x = \pm \frac{1}{2}a$, so erhält man für $y \rightarrow 0$, gemäß den zugrunde gelegten Randbedingungen, $\sigma_x = 0$, $\tau = 0$. In Abb. 2b ist noch der Verlauf der Normalspannungen längs $y = 0.1a$

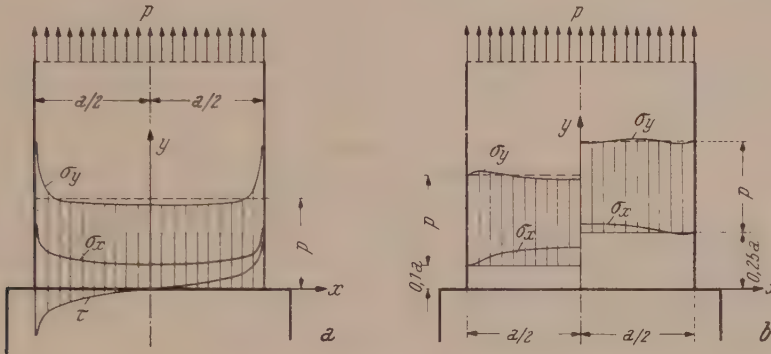


Abb. 2.

und $y = 0.25a$ zu sehen. Die Spannungen σ_x sind bereits in $y = 0.25a$ verhältnismäßig klein und die Spannungen σ_y weichen nur mehr wenig von der Zugspannung p ab. Für $y = 0.6a$ ergab sich bereits praktisch $\sigma_x \doteq 0$, $\sigma_y \doteq p$.

Daß eine Berechnung der Spannungsverteilung in einem stumpf geschweißten Flachstahl bei starr vorausgesetzter Naht² zu ganz anderen Ergebnissen geführt hat, ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß dort zum Aufbau der Lösung keine vollständigen Funktionensysteme verwendet wurden, daß ferner die Bedingung $(\varepsilon_x)_{y=0} = 0$ nicht an jeder Stelle x erfüllt werden konnte und daß schließlich die Bedingung $(v)_{y=0} = 0$ unberücksichtigt geblieben ist.

VI. Stumpfstoß eines zugbeanspruchten Flachstabes.

Mit den vorstehend verwendeten Spannungsfunktionen konnte auch die Spannungsverteilung eines auf Zug beanspruchten und mittels einer Stumpfnahht gestoßenen Flachstabes (Abb. 3) untersucht werden.

Die elastischen Eigenschaften des aufgeschmolzenen Konstruktionsmaterials und des Schweißgutes weisen gegenüber jenen des thermisch unbeeinflusst gebliebenen Werkstoffes Verschiedenheiten auf. Der Elastizitätsmodul E^* des Schweißgutes kann etwas kleiner sein als der Modul E des Flachstabes. Unter dieser Voraussetzung wurde die Spannungsverteilung ermittelt. Hierbei wurde angenommen, daß die Isotropie der Werkstoffe keine Störung erfahren habe und daß sich der Elastizitätsmodul an den Nahträndern sprunghaft von E auf E^* ändere. Die Stabbreite sei wieder a , die mittlere Breite der auf Blechdicke abgearbeiteten Stumpfnahht sei s ;

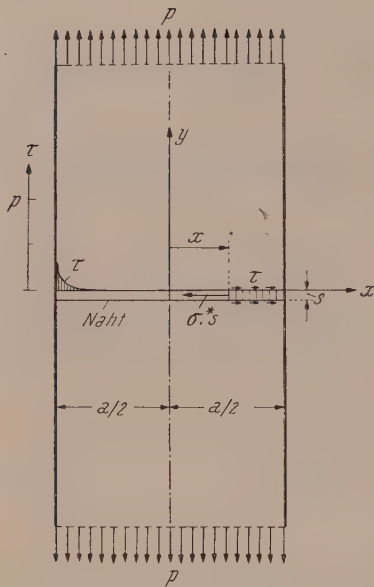


Abb. 3.

Blechdicke gleich der Längeneinheit. An Stelle der früheren Randbedingung (8) ist jetzt die Bedingung

$$(\varepsilon_x)_{y=0} = \frac{\sigma^*}{E^*} - \mu^* \frac{(\sigma_y)_{y=0}}{E^*}$$

zu erfüllen; hierbei bedeutet σ^* die Längsspannung der Naht an der Stelle x (Abb. 3):

$$\sigma^* = \frac{1}{2} \frac{a}{s} \int_x^a (\tau)_{y=0} dx.$$

Die Ermittlung der Spannungen der Flachstäbe ist wesentlich umständlicher als für den Anschluß nach Abb. 1 und kann hier aus Raummangel nicht gebracht werden. Die Auswertung für $E^* = 0.9 E$, $\mu^* = \mu$ ergab den in Abb. 3 dargestellten Verlauf der Schubspannungen $(\tau)_{y=0}$. Diese Schubspannungen sind wesentlich kleiner als beim Anschluß an einen starren Konstruktionsteil, werden aber an den Randpunkten wieder unendlich groß. Der Spannungszustand in den Randpunkten ist irregulär, verursacht durch die vorausgesetzte sprunghafte Änderung des Elastizitätsmoduls.

Bei der Durchführung der vorstehenden Untersuchungen hat mich Frau Dr. Tungal unterstützt; sie hat auch alle Zahlenrechnungen besorgt.

(Eingegangen am 4. Mai 1955.)

Diophantische Vektorgleichungen.

Von R. Grammel, Stuttgart.

Zusammenfassung. Nachdem der Begriff des „ganzen“ Vektors in geeigneter Weise erklärt ist, wird hier gezeigt, wie man Vektorgleichungen (und Systeme von solchen), deren Lösung an sich unbestimmt bleibt (wie bei den meisten Vektorgleichungen), durch eine sogenannte diophantische Menge von ganzen Vektoren lösen kann.

Summary. After having suitably defined the concept of vector “integers”, the author shows how vector equations (and systems of such equations) the solution of which remains itself undetermined (as with most vector equations), may be solved by means of a so-called Diophantine set of vector integers.

Résumé. Après avoir bien expliqué le sens de vecteur «entier», l'on montre ici la façon de résoudre des équations vectorielles (et des systèmes d'équations) dont la solution reste elle-même indéterminée (comme pour la plupart des équations vectorielles) au moyen d'une quantité dite diophantine de vecteurs entiers.

I. Einleitung.

Vektorgleichungen¹ von der Form $[a \ r] = b$ oder $a \ r = b$ oder $[a \ [b \ r]] = c$ und viele weitere haben für gegebene Vektoren a , b , c und gegebene Skalare b usw. eine

¹ Wir bezeichnen hier Vektoren mit Frakturbuchstaben, das skalare Produkt ohne Punkt und nur wo nötig mit runden Klammern, das vektorielle Produkt mit eckigen Klammern. Ich halte den Streit darüber, welche von den verschiedenen üblichen Bezeichnungen die bessere sei, für überflüssig, weil jeder, der mit Vektoren einigermaßen vertraut ist, mühelos von der einen Bezeichnungsart zur anderen übergehen kann. Es gibt in vielen Teilen der Mathematik und Physik größere Bezeichnungsunterschiede, an denen sich kein Kundiger ernstlich stößt.

nichtabzählbar unendliche Menge von Lösungsvektoren r . Es gibt aber auch Vektorgleichungen, die zwar im allgemeinen einen eindeutigen Lösungsvektor r besitzen, jedoch ebenfalls eine nichtabzählbar unendliche Menge von Lösungsvektoren r , wenn zwischen ihren „Koeffizienten“ gewisse Bedingungen bestehen, z. B. die Gleichung $[a \ b \ r] + c \ r = d$, wenn $c = a \ b$ ist. Die entsprechende Unbestimmtheit bei gewöhnlichen Gleichungen läßt sich, wie von den diophantischen Gleichungen her altbekannt ist, unter Umständen dadurch wesentlich verringern, daß man ihre Koeffizienten auf ganze Zahlen beschränkt und auch nur ganzzahlige Lösungen zuläßt. Man kann es dann erreichen, daß diese Gleichungen, wenn sie überhaupt solche Lösungen haben, deren nur eine abzählbar unendliche oder sogar nur eine endliche Menge besitzen.

Soviel mir bekannt, hat man diese Überlegungen bisher nicht auf Vektorgleichungen übertragen, obwohl sie Anwendungen mannigfacher Art zulassen (z. B. in der Theorie der Raumgitter). Die folgenden Untersuchungen über diophantische Vektorgleichungen sind zwar wohl zu einem Teil in der Theorie der gewöhnlichen diophantischen Gleichungssysteme² implizit enthalten, gehen aber doch insofern wesentlich darüber hinaus, als bei uns fast überall Nebenbedingungen hinzutreten, die sich gerade in der Vektorsprache einfach ausdrücken und einfach berücksichtigen lassen.

II. Ganze Vektoren und diophantische Mengen.

Wir müssen zunächst definieren, was ein „ganzer“ Vektor sein soll. Es hätte offenbar keinen Sinn, darunter einen Vektor von ganzzahliger Länge zu verstehen. Denn dann wäre schon die Addition und die vektorielle Produktbildung innerhalb des Bereiches solcher „ganzen“ Vektoren nicht allgemein ausführbar; und auch das neben seiner Länge wesentliche Merkmal eines Vektors, seine Richtung im Raum, könnte dann kaum sinnvoll ganzzahlig festgelegt werden. Vielmehr wollen wir so vorgehen: In einem rechtwinkligen, rechtsgängigen, kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) seien als ganze Gitterpunkte alle Punkte bezeichnet, deren Koordinaten x, y, z ganze Zahlen sind, und das soll weiterhin stets heißen: ganze positive oder ganze negative Zahlen einschließlich der Null, wenn die Null im Einzelfall nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird. Als dann nennen wir ganze Vektoren alle Vektoren, die vom Nullpunkt des Koordinatensystems zu einem ganzen Gitterpunkt hinführen, deren x -, y - und z -Komponenten demgemäß ganze Zahlen sind. Der Nullpunkt selbst ist ein ausgearteter ganzer Vektor, weil seine Richtung völlig unbestimmt bleibt; dieser sog. Nullvektor soll zwar als Lösungsvektor r einer Vektorgleichung zugelassen sein, jedoch als gegebener Koeffizientenvektor a, b, c usw. einer Vektorgleichung immer ausgeschlossen werden, wenn er dabei nicht ausdrücklich zugelassen ist.

Wenn a und b ganze Vektoren sind, so ist auch ihre Summe $a + b$ und ihr Vektorprodukt $[a \ b]$ ein ganzer Vektor, ihr skalares Produkt $a \ b$ aber eine ganze Zahl.

Wenn ein ganzer Vektor außer dem Nullpunkt und seinem Endpunkt keinen weiteren ganzen Gitterpunkt trägt, wenn also seine x -, y - und z -Komponenten ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, so soll er einzügig heißen, dagegen allgemein s -zügig, wenn er zwischen dem Nullpunkt und seinem Endpunkt genau noch $s - 1$ weitere ganze Gitterpunkte trägt, wenn also seine drei Komponenten ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler s sind (weil er dann aus s „ganzen Zügen“ besteht). Wir wollen die positive ganze Zahl s (≥ 1) auch seine Zugzahl nennen.

² S. etwa den Bericht von Th. Skolem: Diophantische Gleichungen. Berlin. 1938. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. V, H. 4.)

Ferner wollen wir eine abzählbar m -fach unendliche Menge von irgendwelchen als ganz bezeichneten Elementen eine m -fache diophantische Menge nennen. Die ganzen Gitterpunkte im Raum bilden also eine dreifache diophantische Punktmenge, die ganzen Vektoren im Raum eine dreifache diophantische Vektormenge.

Während eine beliebige Nullpunktsebene im allgemeinen außer dem Nullpunkt durchaus keinen weiteren ganzen Gitterpunkt zu tragen braucht (z. B. die Ebene $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + z = 0$), so gilt:

Jede Nullpunktsebene senkrecht zu einem ganzen Vektor enthält eine zweifache diophantische Punktmenge.

Zum Beweis bezeichnen wir mit a_x, a_y, a_z die (ganzzahligen) Komponenten des ganzen Vektors α und mit x, y, z die Komponenten des laufenden Vektors r der zu α senkrechten Nullpunktsebene; dann lautet deren Gleichung

$$\alpha r \equiv a_x x + a_y y + a_z z = 0,$$

und diese hat nach einem bekannten Satz über diophantische Gleichungen in der Tat stets eine zweifache diophantische Menge von Lösungstripeln (x, y, z) .

Ferner sieht man ohne weiteres, daß jede Nullpunktsebene, die einen ganzen Vektor enthält, eine einfache diophantische Menge von Punkten trägt, die zueinander äquidistant sind, und daß folglich die sämtlichen ganzen Punkte jeder Nullpunktsebene, die außer dem Nullpunkt überhaupt noch weitere ganze Punkte enthält, entweder eine einfache diophantische Menge von äquidistanten Punkten auf einer Nullpunktsebene bilden, oder aber eine zweifache diophantische Menge von Punkten, die dann die Eckpunkte von lauter kongruenten, die ganze Ebene bedeckenden Parallelogrammen sind.

Verschiebt man eine Nullpunktsebene, die eine diophantische Punktmenge trägt, parallel mit sich selbst in der Richtung irgendeines ganzen Vektors g bis zu dessen Endpunkt, so trägt sie in der neuen Lage ebenfalls eine diophantische Punktmenge, und die Punkte dieser neuen Menge liegen zueinander genau so, wie die Punkte der ursprünglichen Menge zueinander lagen. Wir nennen alle Ebenen, die so mittels eines einzügigen ganzen Vektors g und dann allgemein mittels aller Vektoren ng , wo n jede ganze Zahl sein kann, aus einer Nullpunktsebene entstehen, untereinander und zu der sie erzeugenden Nullpunktsebene homolog.

Daher enthält auch jede beliebige Gerade, die wenigstens zwei ganze Punkte trägt, eine einfache diophantische Menge von äquidistanten Punkten, und jede beliebige Ebene, die wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende ganze Punkte trägt, eine zweifache diophantische Menge von Punkten, die die Eckpunkte von lauter kongruenten, die ganze Ebene bedeckenden Parallelogrammen sind.

Man erkennt aber auch, daß eine Gerade und eine nicht zu ihr parallele Ebene, selbst wenn sie diophantische Punktmengen tragen, sich nicht in einem ganzen Punkt schneiden müssen, und daß zwei nicht parallele Ebenen, welche zweifache diophantische Punktmengen tragen, zwar eine einfache diophantische Punktmenge als Durchschnitt der beiden zweifachen diophantischen Punktmengen besitzen können, jedoch durchaus nicht immer besitzen müssen (s. z. B. Ziffer V, Nr. 2).

Die Eigenschaft eines Vektors, nach unserer Definition ein ganzer Vektor zu sein, ist nicht invariant gegen Koordinatentransformation, und dies besagt, daß wir hier (ähnlich wie ja auch mitunter in der Matrizenrechnung) das Wort „Vektor“ in etwas anderer Bedeutung benützen als in der klassischen Vektorrechnung. Wir können uns im folgenden aber fast stets in der Sprache der Vektoren viel kürzer ausdrücken als in der Sprache der diophantischen Gleichungssysteme.

Wenn wir nunmehr zur Aufzählung und Lösung diophantischer Vektorgleichungen übergehen, so wollen wir für eine übersichtliche Einteilung eine in dem gesuchten Vektor r lineare (oder nichtlineare, aber dann algebraische) Vektorgleichung als eine m -stufige Gleichung bezeichnen, wenn der Vektor r darin nur in Produkten von höchstens m vektoriellen Faktoren vorkommt. In dieser Mitteilung beschränke ich mich zunächst auf lineare (ein- und mehrstufige) Gleichungen.

III. Die Gleichung $[a r] = b$.

Nächst der trivialen linearen einstufigen Vektorgleichung $a r = b$ ist die einfachste lineare zweistufige Vektorgleichung, die zu einer diophantischen Lösung führt, die Gleichung

$$[a r] = b. \quad (1)$$

Sie hat, wie längst bekannt³, die nichtabzählbar einfach unendliche Menge von Lösungsvektoren

$$r = \frac{[b a]}{a^2} + \alpha a \quad (\alpha \text{ beliebige Zahl}), \quad (1^*)$$

und zwar dann und nur dann, wenn die Vektoren a und b die Nebenbedingung

$$a b = 0 \quad (2)$$

erfüllen, also der Vektor a auf dem Vektor b senkrecht steht. Die Lösungsvektoren r (1*) erfüllen, wie es (1) verlangt, die weitere Bedingung

$$b r = 0. \quad (3)$$

Für unsere Frage, unter welchen Umständen die also diophantische Gl. (1) für ganze Vektoren a und b auch ganze Lösungsvektoren r besitzt, und wie man diese dann finden kann, nützt jedoch die Lösung (1*) nichts, da im allgemeinen $[b a]/a^2$ kein ganzer Vektor ist. Man kann die Frage im Hinblick auf (1*) aber auch so formulieren: Unter welchen Umständen trifft eine Gerade parallel zum Vektor a durch den Endpunkt des Vektors $[b a]/a^2$ auf ganze Gitterpunkte, und wie sind diese zu berechnen?

In den Komponenten a_x, a_y, a_z von a und b_x, b_y, b_z von b sowie x, y, z von r lauten die Gl. (1), (2) und (3)

$$a_y z - a_z y = b_x, \quad (1a)$$

$$a_z x - a_x z = b_y, \quad (1b)$$

$$a_x y - a_y x = b_z, \quad (1c)$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \quad (2a)$$

$$b_x x + b_y y + b_z z = 0. \quad (3a)$$

Setzt man zunächst voraus, daß der Vektor b in keiner Koordinatenebene (und also auch in keiner Koordinatenachse) liegt, und daß demnach $b_x \neq 0, b_y \neq 0, b_z \neq 0$ ist, so sind wegen (2a) und (3a) je zwei der drei Gl. (1a), (1b), (1c) eine Folge der dritten. Denn eliminiert man b_z bzw. b_y aus (2a) und (3a), so erhält man

$$(a_z x - a_x z) b_x = (a_y z - a_z y) b_y$$

bzw.

$$(a_x y - a_y x) b_x = (a_y z - a_z y) b_z,$$

und dies geht, wenn man (1a) als richtig voraussetzt, wegen $b_x \neq 0$ gerade in (1b) bzw. (1c) über; und analog würde (1a) und (1c) wegen $b_y \neq 0$ aus (1b), und (1a) und

³ S. etwa J. Spielrein: Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., Formelsammlung S. 3. Stuttgart. 1926.

(1b) wegen $b_z \neq 0$ aus (1c) hervorgehen. Man kann sich weiterhin also etwa auf die drei Gl. (1a), (2a), (3a) beschränken.

Nunmehr seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} ganze Vektoren, und zwar zunächst \mathfrak{a} ein einzügiger Vektor, so daß a_x, a_y, a_z keinen gemeinsamen Teiler haben. Von den drei Zahlen a_x, a_y, a_z kann dann höchstens eine auch Null sein, weil sonst gemäß (1a) bis (1c) mindestens eine der Komponenten b_x, b_y, b_z verschwinden würde, entgegen unserer Voraussetzung. Wir können ohne jede Einschränkung der Allgemeinheit das Koordinatensystem so wählen, daß a_y und a_z teilerfremd sind (da es unter drei ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler mindestens zwei zueinander teilerfremde gibt), und offenlassen, ob a_x verschwindet oder nicht. Dann aber hat nach dem Bachetschen Fundamentalsatz der linearen inhomogenen diophantischen Gleichungen die Gl. (1a) eine einfache diophantische Menge von Lösungen (y, z) , die man wegen $b_x \neq 0$ in der Form

$$y = b_x y', \quad z = b_x z' \quad (4)$$

darstellen kann, wo y' und z' die ganzzahligen Lösungspaare der Normalform

$$a_y z' - a_z y' = 1 \quad (5)$$

der linearen inhomogenen diophantischen Gleichungen sind. Die Gesamtheit dieser Lösungspaare (y', z') ergibt sich bekanntlich in der Gestalt

$$y' = y_0' + n a_y, \quad z' = z_0' + n a_z \quad (n \text{ jede ganze Zahl}) \quad (6)$$

aus einem einzigen Lösungspaar (y_0', z_0') von (5), welches man mit bekannten Methoden (Euklid-Eulerscher Algorithmus, Kettenbruchmethode) in jedem Falle leicht findet. Die dritte Komponente x von \mathfrak{r} folgt dann vollends aus (3a) wegen (4), (6), (2a) und $b_x \neq 0$ zu

$$x = -(b_y y_0' + b_z z_0') + n a_x b_x \quad [n \text{ wie in (6)}], \quad (7)$$

und damit ist eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \mathfrak{r} nachgewiesen.

Ist jedoch \mathfrak{a} ein s -zügiger Vektor ($s > 1$), haben also die Zahlen a_x, a_y, a_z den größten gemeinsamen Teiler s , so gibt es zwei Unterfälle:

a) Wenn die Zugzahl des Vektors \mathfrak{b} weder s noch ein ganzes Vielfaches von s ist, wenn also die Zahlen b_x, b_y, b_z nicht den gemeinsamen Teiler s haben, so führt offensichtlich mindestens eine der drei Gl. (1a), (1b), (1c) auf einen Teilbarkeitswiderspruch bei Beschränkung auf ganzzahlige Lösungstriple (x, y, z) , und somit gibt es in diesem Unterfall überhaupt keinen ganzen Lösungsvektor \mathfrak{r} .

b) Wenn hingegen der Vektor \mathfrak{b} ein st -zügiger Vektor ist ($t = 1, 2, \dots$), wenn also die Zahlen b_x, b_y, b_z den gemeinsamen Teiler s haben (und möglicherweise noch einen weiteren gemeinsamen Teiler $t > 1$), so kann man den Teiler s aus den drei Gl. (1a), (2a), (3a) wegheben und dann aus den so vereinfachten Gleichungen die einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \mathfrak{r} wie vorhin finden⁴.

Nun müssen wir noch die Fälle untersuchen, daß nicht alle Komponenten b_x, b_y, b_z des Vektors \mathfrak{b} von Null verschieden sind, daß der Vektor \mathfrak{b} also in einer Koordinatenebene oder in einer Koordinatenachse liegt oder gar der Nullvektor ist. Solange wenigstens eine dieser Komponenten, sagen wir ohne Einschränkung der Allgemein-

⁴ Man darf jedoch nicht schließen, daß zu einem s -zügigen ersten Faktor \mathfrak{a} eines Vektorproduktes $[\mathfrak{a} \mathfrak{r}]$ ein t -zügiger zweiter Faktor \mathfrak{r} gehören müsse, damit das Produkt $[\mathfrak{a} \mathfrak{r}]$ ein st -zügiger Vektor \mathfrak{b} wird. Denn schon einfache Beispiele zeigen, daß das Produkt der Zugzahlen der Faktoren eines Vektorproduktes nicht gleich der Zugzahl des Produktvektors sein muß. So ergibt z. B. der dreizügige Vektor \mathfrak{a} mit den Komponenten 3, 3, 6 und der einzügige Vektor \mathfrak{r} mit den Komponenten 1, 3, 8 den sechszügigen Vektor $\mathfrak{b} = [\mathfrak{a} \mathfrak{r}]$ mit den Komponenten 6, — 18, 6.

heit b_x , nicht verschwindet, bestimmen zwar nach wie vor die Gl. (1a), (2a), (3a) das Problem, aber die Lösung verläuft dann doch teilweise etwas anders.

Verschwindet zunächst nur eine Komponente von \mathfrak{b} , ist also (ohne Einschränkung) $b_x \neq 0$, $b_y \neq 0$, $b_z = 0$, liegt der Vektor \mathfrak{b} also in der (x, y) -Ebene, aber in keiner Koordinatenachse, so hat man statt (1a), (2a), (3a)

$$a_y z - a_z y = b_x, \quad (8)$$

$$a_x b_x + a_y b_y = 0, \quad (9)$$

$$b_x x + b_y y = 0. \quad (10)$$

Wenn die Nebenbedingung (2) in der Form (9) nicht von vornherein auf einen Widerspruch führen soll, und (was selbstverständlich ist) \mathfrak{a} nicht der Nullvektor sein darf, so gibt es jetzt für die Lösbarkeit der Vektorgleichung (1) nur folgende drei Möglichkeiten:

- a) $a_x \neq 0$, $a_y \neq 0$, $a_z = 0$,
- b) $a_x \neq 0$, $a_y \neq 0$, $a_z = 0$ [\mathfrak{a} in der (x, y) -Ebene],
- c) $a_x = a_y = 0$, $a_z \neq 0$ (\mathfrak{a} in der z -Achse).

Der Fall a ist völlig nach der Methode des behandelten allgemeinen Falles zu erledigen.

Im Falle b muß man die beiden Unterfälle unterscheiden, daß a_x und a_y einen größten gemeinsamen Teiler s oder keinen gemeinsamen Teiler haben, daß also \mathfrak{a} ein s -zügiger oder ein einzügiger Vektor ist; man kann aber beide Unterfälle in den Formeln

$$a_x = s a_x', \quad a_y = s a_y' \quad (11)$$

mit ganzen Zahlen a_x' und a_y' zusammenfassen, wenn man verabredet, daß für $s = 1$ die Striche bei a_x' und a_y' weiterhin wegbleiben sollen. Dann muß nach (9) mit einer von Null verschiedenen positiven oder negativen Zahl t

$$b_x = t a_y = s t a_y', \quad b_y = -t a_x = -s t a_x' \quad (12)$$

sein und also nach (8) und (11) wegen $a_z = 0$

$$z = t, \quad (13)$$

woraus hervorgeht, daß $t (\neq 0)$ zudem eine ganze Zahl sein muß, wenn z ganzzahlig sein soll. Dies zeigt nach (12) nur wieder, daß die Zugzahl $s |t|$ des Vektors \mathfrak{b} gleich der Zugzahl s von \mathfrak{a} oder ein ganzes Vielfaches $|t|$ von ihr sein muß, wenn die Gl. (1) überhaupt ganze Lösungsvektoren \mathfrak{r} besitzen soll, und dann ist mit (13) ihre z -Komponente gefunden. Ihre beiden anderen Komponenten folgen dann vollends aus (10) und (12) mit einer weiteren, offenbar ganzen Zahl n zu

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{n}{st} b_y = n a_x', \\ y &= \frac{n}{st} b_x = n a_y', \end{aligned} \right\} \quad (n \text{ jede ganze Zahl}). \quad (14)$$

Die Lösung (13), (14) [mit der durch (12) vorgeschriebenen ganzen Zahl t] stellt wieder eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \mathfrak{r} dar.

Im Falle c kommt wegen $a_x = a_y = 0$ die Komponente z von \mathfrak{r} gar nicht mehr in den Gl. (8) bis (10) vor, und (9) ist von selbst befriedigt. Somit darf man für z jede beliebige ganze Zahl wählen:

$$z = n \quad (n \text{ jede ganze Zahl}). \quad (15)$$

Weiter verlangt (8) (wegen $a_y = 0$, $a_z \neq 0$), daß mit einer ganzen Zahl $p \neq 0$

$$b_x = p a_z \quad (16)$$

sein muß, womit nach (8)

$$y = -p \quad (17)$$

gefunden ist. Schließlich verlangt (10) mit (16) und (17)

$$p a_z x - b_y p = 0 \quad (18)$$

oder wegen $p \neq 0$ mit einer ebenfalls ganzen Zahl $q \neq 0$

$$b_y = q a_z, \quad (19)$$

womit nach (18) auch

$$x = q \quad (20)$$

gefunden ist. Die Forderungen (16) und (19) besagen wiederum, daß die Zugzahl des Vektors \mathfrak{b} gleich der Zugzahl des Vektors \mathfrak{a} oder ein ganzes Vielfaches von ihr sein muß, wenn die Gl. (1) ganze Lösungsvektoren \mathfrak{r} besitzen soll, und diese bilden dann nach (15), (17) und (20) [mit den durch (16) und (19) vorgeschriebenen ganzen Zahlen p und q] auch hier eine einfache diophantische Menge.

Verschwinden ferner zwei der drei Komponenten des Vektors \mathfrak{b} , ist also (wieder ohne Einschränkung) $b_x \neq 0$, $b_y = b_z = 0$, liegt der Vektor \mathfrak{b} somit in der x -Achse, so müssen \mathfrak{a} und \mathfrak{r} in der (y, z) -Ebene liegen, also $a_x = 0$ und

$$x = 0 \quad (21)$$

sein, natürlich in Einklang mit (9) und (10). Die Gl. (8) aber ist leicht zu deuten: Wenn a_y und a_z einen gemeinsamen Teiler s haben, der kein Teiler von b_x ist, wenn also der Vektor \mathfrak{a} s -züglich ist ($s > 1$), der Vektor \mathfrak{b} aber nicht s - t -züglich ($t = 1, 2, \dots$), so enthält (8) einen Widerspruch und es gibt keinen ganzen Lösungsvektor \mathfrak{r} . Wenn hingegen a_y und a_z keinen gemeinsamen Teiler s haben, oder wenn ein etwaiger gemeinsamer Teiler s von ihnen auch Teiler von b_x ist, wenn also zu einem s -zügigen Vektor \mathfrak{a} ($s = 1, 2, \dots$) ein s - t -zügiger Vektor \mathfrak{b} ($t = 1, 2, \dots$) gehört, so besitzt die Gl. (8) eine einfache diophantische Menge von Lösungspaaren (y, z) , die wie im allgemeinen Falle zu finden sind, und also auch die Gl. (1) eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \mathfrak{r} .

Zuletzt bleibt noch der Fall übrig, daß \mathfrak{b} der Nullvektor ist. Jetzt hat (1) offenbar stets die einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren

$$\mathfrak{r} = \frac{n}{s} \mathfrak{a} \quad (n \text{ jede ganze Zahl, } \mathfrak{a} \text{ } s\text{-züglich}). \quad (22)$$

Wir stellen noch fest, daß die gefundenen einfachen diophantischen Mengen von Lösungen (x, y, z) jeweils eine Menge von äquidistanten Punkten auf einer Geraden darstellen, die zum Vektor \mathfrak{a} parallel verläuft, und zwar sämtliche ganzen Punkte auf dieser Geraden. Man erkennt dies aus den gefundenen Lösungsformeln ohne weiteres — übrigens in Übereinstimmung mit der Formel (1*); und offensichtlich kann man alle gefundenen diophantischen Lösungsvektoren \mathfrak{r} auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^* + \frac{n}{s} \mathfrak{a} \quad (n \text{ jede ganze Zahl, } \mathfrak{a} \text{ } s\text{-züglich}), \quad (23)$$

wo \mathfrak{r}^* irgendein ganzer Lösungsvektor von (1) ist.

Wir fassen die Ergebnisse in folgendem Satz⁵ zusammen:

Die Vektorgleichung $[\mathfrak{a} \mathfrak{r}] = \mathfrak{b}$ mit ganzen Vektoren \mathfrak{a} und \mathfrak{b} , die aufeinander senkrecht stehen (oder von denen \mathfrak{b} der Nullvektor ist), hat dann und nur dann eine

⁵ Dieser Satz läßt eine zahlentheoretische Deutung zu: Ebenso wie man ein Zahlendublett (x, y) als eine komplexe „Zahl“ bezeichnet, wenn für es die Additions- und Multiplikationsgesetze

einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren r , deren Endpunkte die sämtlichen äquidistanten ganzen Punkte auf einer Geraden parallel zum Vektor a sind, wenn die Zugzahl des Vektors b gleich der des Vektors a oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist (oder wenn b der Nullvektor ist). Andernfalls gibt es überhaupt keinen ganzen Lösungsvektor r .

IV. Die Gleichung $ar = b$.

Die nächst einfache lineare zweistufige Vektorgleichung

$$ar = b \quad (24)$$

hat die nichtabzählbar zweifache unendliche Menge von Lösungsvektoren

$$r = \frac{b}{a^2} a + [\alpha \xi] \quad (\xi \text{ beliebiger Vektor}). \quad (24^*)$$

Um die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen die Gl. (24) für ganze Vektoren a und ganze Zahlen b auch ganze Lösungsvektoren r besitzt, unter welchen Umständen also die Ebene senkrecht zum Vektor a durch den Endpunkt des Vektors $(b/a^2)a$ ganze Punkte enthält, und wie man diese dann findet, können wir wieder nicht von der allgemeinen Lösung (24*) ausgehen, sondern schreiben (24) in Komponentenform

$$a_x x + a_y y + a_z z = b \quad (25)$$

oder nach Wegheben eines etwaigen größten gemeinsamen Teilers s von a_x, a_y, a_z und b

$$a'_x x + a'_y y + a'_z z = b' \quad (25a)$$

mit

$$a_x = s a'_x, \quad a_y = s a'_y, \quad a_z = s a'_z, \quad b = s b',$$

wobei wieder für $s = 1$ die Striche wegbleiben sollen.

Setzen wir zunächst $b \neq 0$ und also auch $b' \neq 0$ voraus und ebenso $a'_x \neq 0, a'_y \neq 0, a'_z \neq 0$, dann sind zwei Fälle möglich.

Besitzen erstens a'_x, a'_y, a'_z noch einen weiteren gemeinsamen Teiler $t > 1$, so kann dieser kein Teiler von b' sein (da ja s der größte gemeinsame Teiler von a_x, a_y, a_z und b sein sollte), und dann enthält (25a) einen Widerspruch für ganzzahlige x, y, z . In diesem Fall gibt es überhaupt keinen ganzen Lösungsvektor r der Gl. (24).

Besitzen aber zweitens a'_x, a'_y, a'_z keinen weiteren gemeinsamen Teiler, so können höchstens zwei von ihnen noch einen gemeinsamen größten Teiler p haben, sagen

entsprechend festgesetzt sind, und zwar als eine „ganze“ komplexe Zahl, wenn x und y ganz sind, so kann man das Tripel (x, y, z) der Koordinaten jedes ganzen Gitterpunktes als eine „ganze Zahl“ in noch weiterem Sinne ansehen. In diesem Zahlensystem gelten die gleichen Additions- und Multiplikationsgesetze wie für die Addition und für die vektorielle Multiplikation der Komponenten der entsprechenden ganzen Vektoren. Während es aber im System (Ring) der gewöhnlichen ganzen Zahlen und ebenso im System der ganzen komplexen Zahlen solche gibt, die man, abgesehen von den trivialen Faktoren ± 1 bzw. $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, nicht in ein Produkt zweier Zahlen des Körpers zerlegen kann und daher gewöhnliche bzw. komplexe Primzahlen nennt, so läßt sich in dem System dieser ganzen Zahlentripel nach unserem Satze jede Zahl (b_x, b_y, b_z) , sogar die Einheiten $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, \pm 1)$, in zwei nichttriviale Faktoren zerspalten, von denen man den ersten Faktor (a_x, a_y, a_z) sogar ganz willkürlich wählen darf, mit der einzigen Einschränkung, daß die Zugzahl des zugehörigen Vektors a ein Teiler der Zugzahl des zugehörigen Vektors b sein muß; es gibt dann jedesmal sogar abzählbar einfach unendlich viele zweite Faktoren (x, y, z) . Das System dieser Tripelzahlen enthält also keine Primzahlen. Allerdings bilden diese primzahlfreien Zahlen weder einen Körper noch einen Ring, da für ihre Multiplikation das assoziative Gesetz nicht gilt.

wir (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) a_x' und a_y' , wobei der Sonderfall $p = 1$ natürlich eingeschlossen ist. Dann setzen wir

$$a_x' = p a_x'', \quad a_y' = p a_y''$$

und (nach einer Methode von C. G. J. Jacobi)

$$a_x'' x + a_y'' y = u, \quad (26)$$

wo a_x'' und a_y'' nun teilerfremd sind, und erhalten statt (25a)

$$p u + a_z' z = b'. \quad (27)$$

Weil a_z' voraussetzungsgemäß keinen Teiler > 1 mit p gemeinsam hat, so besitzt die diophantische Gl. (27) nach dem Bachetschen Fundamentalsatz eine einfache diophantische Menge von Lösungspaaren (u_m, z_m) (m jede ganze Zahl), die man in bekannter Weise findet. Da aber auch a_x'' und a_y'' teilerfremd sind, so besitzt (26) für jeden gefundenen Wert $u = u_m$ eine einfache diophantische Menge von ebenso zu findenden Lösungspaaren (x_{mn}, y_{mn}) (n jede ganze Zahl). Im ganzen gibt das eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r , und zwar, wie man in Übereinstimmung mit (24*) leicht erkennt, alle Vektoren vom Nullpunkt nach den sämtlichen ganzen Punkten einer zum Vektor a senkrechten Ebene.

Im ersten Falle ist a ein $s t$ -zügiger Vektor ($t > 1$), aber $|b|$ weder gleich $s t$ noch ein ganzes Vielfaches der Zugzahl $s t$ des Vektors a (da t kein Teiler von b' und also auch keiner von b war). Im zweiten Falle ist a ein s -zügiger Vektor, wobei auch $s = 1$ sein kann, und $|b|$ entweder gleich s oder ein ganzes Vielfaches der Zugzahl s von a .

Nun verschwinde eine der drei Komponenten des Vektors a , es sei also (ohne Einschränkung) $a_x \neq 0$, $a_y \neq 0$, $a_z = 0$ und immer noch $b \neq 0$. Dann kommt z in (25) gar nicht mehr vor, kann also jede ganze Zahl sein:

$$z = n \quad (n \text{ jede ganze Zahl}). \quad (28)$$

Haben jetzt a_x' und a_y' noch einen gemeinsamen Teiler, der nicht Teiler von b' ist, so geht die Zugzahl von a wieder nicht in b' auf, und es gibt überhaupt keinen ganzen Lösungsvektor r . Haben aber a_x' und a_y' keinen gemeinsamen Teiler mehr, so geht die Zugzahl von a in b auf, und dann besitzt (25a) (mit $a_z' = 0$) eine einfache diophantische Menge von Lösungspaaren (x, y) , und dies gibt zusammen mit (28) wieder eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r .

Verschwinden zwei Komponenten von a , ist also (ohne Einschränkung) $a_x \neq 0$, $a_y = a_z = 0$, so hat man

$$y = m, \quad z = n \quad (m, n \text{ jede ganze Zahl}), \quad (29)$$

und gemäß (25a) muß mit einer ganzen Zahl $p \neq 0$

$$b' = p a_x' \quad (30)$$

und daher

$$x = p \quad (31)$$

sein, wonach also die Zugzahl von a wieder in b aufgehen muß, wenn anders die zweifache diophantische Menge (29), (31) existieren soll.

Ist schließlich $b = 0$ und also auch $b' = 0$, so sind mindestens zwei der drei zunächst als nicht verschwindend vorausgesetzten Zahlen a_x' , a_y' , a_z' teilerfremd, sagen wir a_x' und a_y' . Dann kann man für z jede ganze Zahl n wählen, und die Gl. (25a) besitzt für jeden Wert $z = n$ eine einfache diophantische Menge von Lösungspaaren (x, y) , was im ganzen wieder eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r ergibt, nämlich die sämtlichen ganzen Punkte der zum Vektor a senkrechten (schon in Ziffer II erwähnten) Nullpunktsebene.

Verschwundet für $b = 0$ auch eine Komponente von α , etwa α_z , so hat man nach (25a) die zweifache diophantische Menge von Lösungstripeln

$$x = m \alpha_y', \quad y = -m \alpha_x', \quad z = n \quad (m, n \text{ jede ganze Zahl}); \quad (32)$$

verschwinden zwei Komponenten von α , etwa α_y und α_z , so hat man offenbar die Lösung

$$x = 0, \quad y = m, \quad z = n \quad (m, n \text{ jede ganze Zahl}). \quad (33)$$

Bezeichnet man mit r_0 die Gesamtheit der für $b = 0$ gefundenen ganzen Lösungsvektoren (deren Endpunkte also die ganzen Punkte in der zum Vektor α senkrechten Nullpunktsebene sind) und mit r^* irgendeinen ganzen Lösungsvektor für $b \neq 0$, so kann man die Lösungsvektoren von (24) in der Form

$$r = r^* + r_0 \quad (34)$$

schreiben, indem man von der in Ziffer II erwähnten Tatsache Gebrauch macht, daß die beiden Ebenen $\alpha r = 0$ und $\alpha r = b$ (r laufender Vektor) zueinander homolog sind.

Wir bemerken noch, daß man die ganzzahligen Lösungen im Falle $b = 0$ auch in der symmetrischen Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{l}{s} \alpha_y - \frac{m}{s} \alpha_z, \\ y_0 &= \frac{l}{s} \alpha_x - \frac{n}{s} \alpha_z, \\ z_0 &= \frac{m}{s} \alpha_x + \frac{n}{s} \alpha_y \end{aligned} \right\} \quad (l, m, n \text{ jede ganze Zahl}) \quad (\alpha \text{ } s\text{-zügig}) \quad (35)$$

darstellen kann, wie man durch Einsetzen in (25) mit $b = 0$ bestätigt, wobei dann allerdings jedes Lösungstripel (x_0, y_0, z_0) unendlich oft erscheint, wenn man l, m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen läßt [weil die Lösungsmenge nur zweifach diophantisch ist, in der Gestalt (35) aber drei unabhängige ganze Parameter enthält].

Wir fassen die Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Die Vektorgleichung $\alpha r = b$ mit einem ganzen Vektor α und einer ganzen Zahl b hat dann und nur dann eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r , deren Endpunkte die sämtlichen ganzen Punkte einer zum Vektor α senkrechten Ebene sind, wenn die Zugzahl des Vektors α ein Teiler von b ist. Andernfalls gibt es überhaupt keinen ganzen Lösungsvektor r .

Die Ergebnisse in Ziffer III und IV kann man als die diophantischen Grundlösungen der linearen Vektorgleichungen bezeichnen. Wir werden sehen, daß sich die diophantischen Lösungen der weiteren zwei- und mehrstufigen linearen Vektorgleichungen auf diese Grundlösungen zurückführen lassen.

V. Systeme von linearen zweistufigen Vektorgleichungen.

Ehe wir zu den Systemen von linearen zweistufigen Vektorgleichungen übergehen, stellen wir fest, daß die einzige lineare zweistufige Vektorgleichung, die es außer den beiden in Ziffer III und IV behandelten gibt, nämlich die Gleichung

$$[\alpha r] + b r = c, \quad (36)$$

worin wir $\alpha \neq 0$ und $b \neq 0$ voraussetzen dürfen [da $\alpha = 0$ auf die triviale einstufige Vektorgleichung und $b = 0$ auf die Grundgleichung (1) von Ziffer III zurückführen würde], im Gegensatz zu der diophantischen Gleichung $[\alpha r] = b$ von Ziffer III stets eine eindeutige Lösung hat, nämlich

$$r = \frac{1}{\alpha^2 + b^2} \left\{ \frac{\alpha c}{b} \alpha + b c + [c \alpha] \right\}, \quad (36^*)$$

wie man durch Einsetzen sofort bestätigt, und man überzeugt sich auch geometrisch für zwei beliebige Vektoren a und c ohne weiteres davon, daß die Gl. (36) den Vektor r eindeutig bestimmt und also keine diophantische Vektorgleichung ist.

Wir wenden uns nun den linearen zweistufigen Systemen von Vektorgleichungen zu.

1. Das System

$$[ar] = b, \quad [cr] = d \quad (37)$$

mit den notwendigen Nebenbedingungen

$$ab = 0, \quad cd = 0, \quad ad + bc = 0 \quad (38)$$

ist ebenfalls nicht diophantisch, sondern hat die eindeutige Lösung⁶

$$r = \frac{[b \ d]}{a \ b}. \quad (37^*)$$

Allerdings muß man die Lösung (37*) für $ad = 0$ anders darstellen. Falls nämlich $ad = 0$ ist, also die Vektoren a und d aufeinander senkrecht stehen, so gibt es nur dann eine (endliche) Lösung r , wenn nach (37*) zugleich auch $[b \ d] = 0$ wird, das heißt, wenn es eine Zahl p derart gibt, daß $d = p \cdot b$ ist. Dann ist aber die Lösungsform (37*) unbestimmt geworden. Weil jedoch mit $ad = 0$ nach der dritten Bedingung (38) auch $bc = 0$ ist, so wird $[b \ [a \ c]] = a \ (b \ c) - c \ (a \ b) = 0$, wenn man noch auf die erste Bedingung (38) achtet. Somit erfordert die Existenz einer (endlichen) Lösung r , daß mit einer weiteren Zahl q auch noch $b = q \ [a \ c]$ sein muß. Mit den Zahlen p und q aber schreibt sich für diesen Sonderfall $ad = 0$ die Lösung dann in der Form

$$r = q \ (c - p \ a), \quad (37^{**})$$

wie man durch Einsetzen in (37) bestätigt. Man hat also auch in diesem Sonderfall einen eindeutigen Lösungsvektor r . [Wir haben die Eindeutigkeit dieses Sonderfalles deswegen sorgfältig nachgewiesen, weil wir später an vielen Beispielen sehen werden, daß eindeutige Lösungen, die für bestimmte Wertebereiche der „Koeffizienten“ unbestimmt werden, in der Regel zu diophantischen Lösungen Veranlassung geben — was bei diesem Beispiel (37) noch nicht eintritt.]

2. Das System

$$ar = b, \quad cr = d \quad (39)$$

dagegen hat nichtabzählbar einfach unendlich viele Lösungen

$$r = \frac{[\mathfrak{s} \ (d \ a - b \ c)]}{\mathfrak{s} \ [a \ c]} \quad (\mathfrak{s} \text{ beliebiger Vektor}). \quad (39^*)$$

Dabei dürfen wir voraussetzen, daß die Vektoren a und c nicht gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben, weil sonst $[a \ c] = 0$ und $d \ a = b \ c$ sein müßte und dann beide Gl. (39) identisch wären. Es ist also zu vermuten, daß das System (39) für ganze Vektoren a und c und ganze Zahlen b und d diophantische Lösungen besitzt.

Um diese Vermutung zu bestätigen, gehen wir von der Vektorformel

$$[r \ [a \ c]] = a \ (c \ r) - c \ (a \ r)$$

aus, die man wegen (39) und mit den neuen ganzen Vektoren

$$\mathfrak{A} = [a \ c] \neq 0, \quad \mathfrak{B} = b \ c - d \ a \neq 0 \quad (40)$$

in der Form

$$[\mathfrak{A} \ r] = \mathfrak{B} \quad (41)$$

schreiben kann, womit die diophantische Lösung des Systems (39) auf Ziffer III zurückgeführt ist. Allerdings ist bis jetzt nur gezeigt, daß jede Lösung des Systems (39)

⁶ J. Spielrein: A. a. O.

auch eine Lösung von (41) ist. Daß aber auch jede Lösung von (41) die beiden Gl. (39) befriedigt, stellt man durch eine kurze Rechnung fest, indem man die allgemeine Lösung von (41), die gemäß (1*) mit (40) die Form

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{A}]}{\mathfrak{A}^2} + \alpha \mathfrak{A} = \frac{1}{[\alpha \mathbf{r}]^2} \{b [\mathbf{c} [\alpha \mathbf{c}]] - d [\alpha [\alpha \mathbf{c}]]\} + \alpha [\alpha \mathbf{c}]$$

hat, in die beiden Gl. (39) einsetzt. Demnach folgt aus dem Schlußsatz von Ziffer III: Falls die Zugzahl des Vektors \mathfrak{B} gleich der Zugzahl des Vektors \mathfrak{A} oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist, so besitzt⁷ das System (39) eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \mathbf{r} . Andernfalls existiert überhaupt kein ganzer Lösungsvektor \mathbf{r} .

Die einfache diophantische Menge der Gitterpunkte des Systems (39) ist, wenn sie existiert, der Durchschnitt der beiden zweifachen diophantischen Mengen der Gitterpunkte der beiden Einzelgleichungen $\alpha \mathbf{r} = b$ und $\mathbf{c} \mathbf{r} = d$. Aber die beiden diophantischen Mengen dieser Einzelgleichungen können sehr wohl für sich existieren und brauchen darum noch keine diophantische Durchschnittsmenge zu besitzen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} a_x = 2, \quad a_y = 1, \quad a_z = 0, \quad b = 2, \\ c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = 0, \quad d = 2. \end{aligned}$$

Die ganzen Gitterpunkte für $\alpha \mathbf{r} = b$ sind die Punkte

$$x = m, \quad y = 2(1 - m), \quad z = n \quad (m, n \text{ jede ganze Zahl}),$$

diejenigen für $\mathbf{c} \mathbf{r} = d$ sind die Punkte

$$x = 2m, \quad y = 1 - m, \quad z = n \quad (m, n \text{ jede ganze Zahl}).$$

Sie haben offensichtlich keinen gemeinsamen Punkt, und in der Tat hat das simultane System beider Gleichungen nach (40) die Hilfsvektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} mit den Komponenten

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 3; \quad B_x = -2, \quad B_y = 2, \quad B_z = 0$$

und also nach dem Schlußsatz von Ziffer III keinen diophantischen Lösungsvektor \mathbf{r} , da \mathfrak{A} ein dreizügiger, \mathfrak{B} aber ein zweizügiger Vektor ist.

3. Das System

$$[\alpha \mathbf{r}] = b, \quad \mathbf{c} \mathbf{r} = d \tag{42}$$

mit der für die Existenz einer Lösung überhaupt notwendigen Nebenbedingung

$$\alpha b = 0 \tag{43}$$

hat für $\alpha c \neq 0$ die eindeutige Lösung

$$\mathbf{r} = \frac{d \alpha + [b \mathbf{c}]}{\alpha c} \tag{42*}$$

und ist also für $\alpha c \neq 0$ kein diophantisches System.

Für

$$\alpha c = 0 \tag{44}$$

dagegen, das heißt für zwei zueinander senkrechte Vektoren α und \mathbf{c} kann es gemäß (42*) überhaupt nur dann (endliche) Lösungen haben, wenn gleichzeitig zwischen den drei Vektoren α , b und \mathbf{c} noch die weitere Beziehung

$$d \alpha = [\mathbf{c} b] \tag{45}$$

⁷ Dieses Kriterium für die Existenz von diophantischen Lösungsvektoren des Systems (39) ist natürlich identisch mit den bekannten Bedingungen für die Existenz von diophantischen Lösungen des Systems der beiden gewöhnlichen Gleichungen, als welche sich (39) in Komponentenform schreiben; vgl. den Satz 5 von S. 10 des in Fußnote 2 von S. 127 zitierten Berichtes von Th. Skolem (wo ein Druckfehler zu berichtigen ist: es muß dort heißen „gleich einem gemeinsamen Teiler“ statt „gleich dem größten gemeinsamen Teiler“).

besteht, die mit (43) und (44) offenbar verträglich ist. Dann erkennt man aber sofort, daß jeder Lösungsvektor r der ersten Gl. (42) von selbst auch die zweite Gl. (42) befriedigt; denn weil für jeden solchen Vektor r nach der ersten Gl. (42) auch $b r = 0$ ist, so folgt aus (45)

$$d [a r] = [c b] r = b (c r),$$

also wegen $[a r] = b$ auch $c r = d$. Mithin ist nun das System (42) völlig gleichwertig mit seiner ersten Gleichung, und damit ist die Frage der Existenz von diophantischen Lösungen des Systems (42) für ganze Vektoren a, b, c und ganze Zahlen d , sowie das Berechnen solcher Lösungen für den Sonderfall (44), (45) auf Ziffer III zurückgeführt: Wenn diophantische Lösungen existieren, so bilden sie eine einfache diophantische Menge.

Wir haben hier die merkwürdige Tatsache gefunden, daß ein System von Vektorgleichungen, das im allgemeinen eine eindeutige Lösung hat, für besondere Wertebereiche der „Koeffizienten“ eine diophantische Menge von Lösungsvektoren r besitzen kann. Im folgenden werden wir dieser Erscheinung auch bei einzelnen Vektorgleichungen begegnen, wenn sie von noch höherer Stufe sind.

4. Das System

$$a r = b, \quad c r = d, \quad e r = f \quad (46)$$

hat für nichtkomplanare Vektoren a, c, e die eindeutige Lösung

$$r = \frac{1}{a [c e]} \{b [c e] + d [e a] + f [a c]\}. \quad (46^*)$$

Sind die Vektoren a, c, e jedoch komplanar, so muß wegen

$$a [c e] = 0 \quad (47)$$

zugleich auch

$$b [c e] + d [e a] + f [a c] = 0 \quad (48)$$

sein, da das System (46) sonst überhaupt keine (endliche) Lösung haben kann. Dann aber folgt aus der Identität

$$(a [c e]) r = (a r) [c e] + (c r) [e a] + (e r) [a c]$$

zufolge (47) und der ersten beiden Gl. (46)

$$b [c e] + d [e a] + (e r) [a c] = 0$$

oder durch Vergleich mit (48) $e r = f$, also die dritte Gl. (46) — und offenbar allgemein, daß mit je zweien der Gl. (46) auch die dritte Gl. (46) erfüllt ist. Folglich ist für komplanare Vektoren a, c, e , die der Bedingung (48) gehorchen (widrigenfalls es überhaupt keine Lösung gäbe), die diophantische Lösung des Systems (46) auf diejenige des Systems (39) zurückgeführt.

Die zweistufigen linearen Vektorgleichungen und Systeme von ihnen sind hiermit alle erledigt.

VI. Lineare dreistufige Vektorgleichungen mit $[a [b r]]$.

Die Mannigfaltigkeit der dreistufigen linearen Vektorgleichungen ist so groß, daß es ermüdend wäre, sie sämtlich zu behandeln. Wir beschränken uns deshalb auf die, die hinsichtlich ihrer Lösungsmethode am wichtigsten erscheinen. Es ist dabei zweckmäßig, sie nach der Form der dreistufigen Produkte einzuteilen, die den gesuchten Lösungsvektor r enthalten; wir beginnen mit dem Produkt $[a [b r]]$.

1. Die Vektorgleichung

$$[a [b r]] = c \quad (49)$$

mit der für die Lösbarkeit notwendigen Nebenbedingung

$$a c = 0 \quad (50)$$

hat die allgemeine Lösung

$$r = -\frac{c}{a b} + \alpha b \quad (\alpha \text{ beliebige Zahl}), \quad (49^*)$$

welche erwarten läßt, daß für $a b \neq 0$ zu ganzen Vektoren a, b, c eine einfache, für $a b = 0$ dagegen eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r existieren kann. Dies wollen wir nun bestätigen.

Wenn zunächst $c \neq 0$ ist, so spaltet man (49) auf in die beiden Gleichungen

$$[a \bar{r}] = c, \quad [b r] = \bar{r}. \quad (51)$$

Falls die Zugzahl von c nicht gleich derjenigen von a oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist, so hat die erste Gl. (51) nach dem Schlußsatz von Ziffer III für ganze Vektoren a und c keinen ganzen Lösungsvektor \bar{r} und also für ganze Vektoren b auch die Gl. (49) keinen solchen r , da nach der zweiten Gl. (51) für ganze Vektoren b und r auch \bar{r} ein ganzer Vektor sein muß. Ist jedoch die Zugzahl von c gleich derjenigen von a oder ein ganzes Vielfaches von ihr, so hat die Gleichung $[a \bar{r}] = c$ eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren \bar{r} , deren Endpunkte auf einer Geraden parallel zum Vektor a liegen. Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

a) Wenn $a b \neq 0$ ist, das heißt wenn die Vektoren a und b nicht zueinander senkrecht sind, so folgt aus der Umformung

$$[a [b r]] \equiv b (a r) - r (a b) = c \quad (52)$$

von (49), daß der gesuchte Lösungsvektor r komplanar ist mit den Vektoren b und c . Diese definieren eine Ebene, da sie wegen (50) nicht auf der gleichen Nullpunktsgersten liegen können (sonst würde aus $a c = 0$ die soeben ausgeschlossene Gleichung $a b = 0$ folgen), und diese Ebene (die auch den Vektor r enthält) steht wegen $a b \neq 0$ nicht auf dem Vektor a senkrecht. Folglich ist jetzt sichergestellt, daß der Vektor $r = [b r]$ nicht auf der Nullpunktsgersten des Vektors a liegt, was die erste Gl. (51) wegen $c \neq 0$ verbieten würde.

Damit ist aber die Lösbarkeit des Systems (51) [und also auch der Ausgangsgleichung (49)] noch lange nicht gesichert. Dazu ist vielmehr erstens erforderlich, daß der Vektor \bar{r} auf dem Vektor b — wegen der zweiten Gl. (51) — senkrecht steht, das heißt daß die einfache diophantische Menge der Lösungen \bar{r} von $[a \bar{r}] = c$ und die zweifache diophantische Menge der ganzen Vektoren in der zum Vektor b senkrechten Nullpunktsebene einen gemeinsamen Vektor \bar{r} (als Durchschnitt dieser beiden Mengen) besitzen. Weil die Endpunkte aller Vektoren \bar{r} auf einer Geraden parallel zum Vektor a liegen, die wegen $a b \neq 0$ nicht senkrecht zu b und also nicht parallel zur Nullpunkt-Normalebene von b läuft, so gibt es einen und nur einen Schnittpunkt jener Geraden und dieser Ebene und also höchstens einen ganzen Vektor \bar{r} senkrecht zu b . Daß der Schnittpunkt aber keineswegs stets ein ganzer Gitterpunkt sein muß, kann man an einfachen Beispielen leicht erkennen.

Für die Lösbarkeit der zweiten Gl. (51) ist nun aber zweitens zudem erforderlich, daß die Zugzahl des etwa existierenden Vektors r gleich der Zugzahl des Vektors b oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist. Erst wenn auch dies noch zutrifft, besitzt die zweite Gl. (51) ganze Lösungsvektoren r , und diese stellen dann die (nach Ziffer III) einfache diophantische Menge der Lösungsvektoren r von (49) dar, und offenbar liegen deren Endpunkte auf einer Geraden parallel zum Vektor b . Wenn die beiden aufgezählten Bedingungen für keinen Vektor \bar{r} zutreffen, so hat die Gl. (49) keinen ganzen Lösungsvektor.

b) Wenn nun aber $a \cdot b = 0$ ist, das heißt wenn die Vektoren a und b zueinander senkrecht stehen, so folgt aus (52), daß mit einer ganzen Zahl $p \neq 0$

$$c = p \cdot b \quad (53)$$

sein muß und folglich

$$a \cdot r = p. \quad (54)$$

Diese Gleichung ersetzt jetzt die Ausgangsgleichung (49) vollständig und ist nach Ziffer IV weiterzubehandeln. Man erhält also im Falle $a \cdot b = 0$ dann und nur dann eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r , deren Endpunkte die sämtlichen ganzen Gitterpunkte der Nullpunktsebene senkrecht zum Vektor a sind, wenn erstens eine Beziehung von der Form (53) zwischen b und c besteht, und wenn zweitens gemäß dem Schlußergebnis von Ziffer IV die Zahl p gleich der Zugzahl des Vektors a oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist.

Jetzt bleibt noch der Sonderfall $c = 0$ übrig. Hier hat man einmal den Nullvektor $r = 0$ als Lösung. Ist aber $r \neq 0$, so muß zufolge (49) a senkrecht zu b stehen, und dann geht (52) über in

$$a \cdot r = 0, \quad (55)$$

was auch schon aus (53) und (54) mit $p = 0$ folgt, und dies besagt nach Ziffer IV, daß für $c = 0$ mit der notwendigen Lösungsbedingung $a \cdot b = 0$ die Gl. (49) die zweifache diophantische Menge aller ganzen Vektoren der Nullpunktsebene senkrecht zum Vektor a als Lösungsvektoren r besitzt, und zwar unabhängig von der Größe der Vektoren a und b . Für $c = 0$ und $a \cdot b \neq 0$ gibt es außer dem Nullvektor keine Lösung.

2. Die Gleichung

$$[a \cdot [b \cdot r]] + c \cdot r = b, \quad (56)$$

worin wir nun $c \neq 0$ voraussetzen dürfen, hat zunächst für $b \neq 0$ und $c \neq a \cdot b$ die eindeutige Lösung

$$r = \frac{c \cdot b - b \cdot (a \cdot b)}{c \cdot (c - a \cdot b)}, \quad (56^*)$$

wie man leicht nachprüfen kann.

Für $c = a \cdot b$ kann (56) nur dann eine (endliche) Lösung haben, wenn zugleich $c \cdot b = b \cdot (a \cdot b)$ ist, wofür man wegen $c = a \cdot b (\neq 0)$ auch

$$b = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} \cdot b \quad (57)$$

schreiben kann, und dann geht (56) wegen

$$[a \cdot [b \cdot r]] = b \cdot (a \cdot r) - r \cdot (a \cdot b) = b \cdot (a \cdot r) - c \cdot r \quad (58)$$

mit (57) über in

$$a \cdot r = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} \quad (59)$$

und hat also für ganze Vektoren a nach Ziffer IV eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren r , wenn $a \cdot b / a \cdot b$ eine ganze Zahl ist, und zwar gleich der Zugzahl des Vektors a oder ein ganzes Vielfaches von ihr.

Für $b = 0$ und $c \neq a \cdot b$ läßt (56) gemäß (56*) nur den Nullvektor $r = 0$ als Lösung zu. Ist aber $c = a \cdot b$, so geht (56) zufolge (58) über in

$$a \cdot r = 0, \quad (60)$$

so daß jetzt gemäß Ziffer IV für ganze Vektoren a die sämtlichen ganzen Vektoren in der zum Vektor a senkrechten Nullpunktsebene die Lösungsvektoren r sind.

VII. Lineare dreistufige Vektorgleichungen mit $a[b\ r]$ oder $a(b\ r)$.

Man kann alle dreistufigen linearen Vektorgleichungen mit Produkten $a[b\ r]$ auf die Gestalt

$$a[b\ r] + c\ r = d \quad (61)$$

bringen und dies umformen in

$$\mathfrak{A}r = d \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = [a\ b] + c, \quad (62)$$

womit ihre diophantischen Lösungen für ganze Vektoren a, b, c und ganze Zahlen d auf Ziffer IV zurückgeführt sind.

Von den linearen Gleichungen mit Produkten $a(b\ r)$ behandeln wir wenigstens drei Typen.

1. Die Gleichung

$$a(b\ r) + c\ r = b, \quad (63)$$

worin wir nun $c \neq 0$ voraussetzen dürfen, hat zunächst für $b \neq 0$ und $c \neq -a\ b$ die eindeutige Lösung

$$r = \frac{1}{c} \left\{ b - \frac{b\ b}{c + a\ b} a \right\}, \quad (63^*)$$

wie leicht nachzuprüfen ist.

Für $c = -a\ b$ kann (63) nur dann eine (endliche) Lösung haben, wenn zugleich $b\ b = 0$ ist, wenn also b auf b senkrecht steht, und dann geht die Gleichung wegen

$$a(b\ r) + c\ r = a(b\ r) - r(a\ b) = [b\ [a\ r]]$$

über in

$$[b\ [a\ r]] = b, \quad (64)$$

womit ihre diophantische Lösung für ganze Vektoren a, b, b und ganze Zahlen c auf Ziffer VI, Nr. 1, zurückgeführt ist.

Für $b = 0$ und $c \neq -a\ b$ läßt (63) gemäß (63*) nur den Nullvektor $r = 0$ als Lösung zu. Ist aber $c = -a\ b$, so geht (63) über in $[b\ [a\ r]] = 0$, und dies verlangt $a\ b = 0$, womit also auch $c = 0$ wird und die Gl. (63) in $b\ r = 0$ ausartet (Ziffer IV).

2. Die Gleichung

$$a(b\ r) + [c\ r] = b \quad (65)$$

hat zunächst für $b \neq 0$, $a\ c \neq 0$ und $b\ c \neq 0$ die eindeutige Lösung

$$r = \frac{1}{(a\ c)(b\ c)} \{ (c\ b - b\ [a\ b])c - (b\ c)[a\ b] \}, \quad (65^*)$$

wie man leicht nachprüft.

Für $a\ c = 0$, $b\ c \neq 0$ muß zufolge (65*)

$$(c\ b - b\ [a\ b])c - (b\ c)[a\ b] = 0 \quad (66)$$

sein, wenn es überhaupt eine (endliche) Lösung geben soll, und dies hat zur Folge, daß dann der Vektor c nicht nur auf a , sondern auch auf b senkrecht stehen, also mit $a\ c = 0$ zugleich auch $c\ b = 0$ sein muß. Somit nimmt (66) die einfachere Form

$$(b\ [a\ b])c = (b\ c)[a\ b] \quad (67)$$

an. Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Ist erstens $[a\ b] \neq 0$, so kann die Bedingung (67) nur erfüllt sein, wenn der Vektor c [den wir von Null verschieden ansehen dürfen, da sonst (65) auf Ziffer IV zurückgeführt wäre] die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie der Vektor $[a\ b]$ hat, wenn also mit zwei teilerfremden ganzen Zahlen $h \neq 0$ und $k \neq 0$

$$c = \frac{h}{k} [a\ b] \quad (68)$$

wird, falls wir von nun an wieder alle Vektoren als ganz voraussetzen. In der Tat macht (68) die Bedingung (67) zu einer Identität. Führt man den Vektor c (68) in (65) ein, so kommt

$$(\{k\mathfrak{b} - h\mathfrak{d}\}r)a = (k - h(a r))\mathfrak{d},$$

und dies zerfällt wegen $[a\mathfrak{d}] \neq 0$ in das System

$$h(a r) = k, \quad e r = 0 \quad \text{mit} \quad e \equiv k\mathfrak{b} - h\mathfrak{d}, \quad (69)$$

das die Form (39) hat und also gemäß (40) mit

$$\mathfrak{A} = h[a e], \quad \mathfrak{B} = k e \quad (70)$$

auf die Gl. (41) $[\mathfrak{A} r] = \mathfrak{B}$ mit der nach (70) offenkundig erfüllten Lösbarkeitsbedingung $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$ zurückgeführt ist und daher gemäß Ziffer III diophantisch weiterbehandelt werden kann, falls die Zugzahl von \mathfrak{B} gleich derjenigen von \mathfrak{A} oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist.

Wenn aber zweitens $[a\mathfrak{d}] = 0$ ist, so wird die Bedingung (67) von vornherein identisch erfüllt, und dann muß mit einer rationalen Zahl p'

$$\mathfrak{d} = p' a \quad (71)$$

sein. Es ist jetzt zweckmäßig, die Vektoren a, \mathfrak{b}, c und $[a\mathfrak{b}]$, soweit sie etwa mehrzünftig sind, in ihren entsprechenden einzügigen Vektoren a', \mathfrak{b}', c' und $[a' \mathfrak{b}']'$ mittels ihrer Zugzahlen auszudrücken:

$$a = s a', \quad \mathfrak{b} = t \mathfrak{b}', \quad c = u c', \quad [a' \mathfrak{b}'] = v [a' \mathfrak{b}']', \quad (72)$$

wobei übrigens v keineswegs gleich 1 sein muß⁸. Dann geht (71) mit $p = p's$ über in

$$\mathfrak{d} = p a', \quad (73)$$

so daß also p eine ganze Zahl sein muß, nämlich die Zugzahl des Vektors \mathfrak{d} , und aus (65) wird

$$u[c' r] = (p - s t \mathfrak{b}' r) a'.$$

Da nach dem Schlußsatz von Ziffer III die Zugzahl $(p - s t \mathfrak{b}' r)$ des rechten Vektors gleich der Zugzahl u des Vektors $c = u c'$ oder ein ganzes Vielfaches von ihr sein muß, wenn überhaupt ganze Lösungsvektoren r existieren sollen, so muß mit einer noch unbekannten ganzen Zahl m

$$[c' r] = m a', \quad \mathfrak{b}' r = \frac{p - m u}{s t} \quad (74)$$

sein, womit unsere Vektorgleichung (65) in ein System von der Form (42) zerspalten ist.

Wenn es keine ganze Zahl m gibt, die die rechte Seite der zweiten Gl. (74) zu einer ganzen Zahl macht, so hat die Gl. (65) keinen ganzen Lösungsvektor r . Wenn es dagegen mindestens eine solche Zahl m_0 gibt, so gibt es auch eine einfache diophantische Menge solcher Zahlen, nämlich offenbar die Zahlen

$$m_n = m_0 + \bar{n} \frac{s t}{u} \quad (\bar{n} \text{ alle ganzen Zahlen, für welche } \bar{n} \frac{s t}{u} \text{ ganz ist}). \quad (75)$$

Weil dann die Bedingung $a c = s u a' c' = 0$ für die Lösbarkeit der ersten Gl. (74) und die Bedingung $\mathfrak{b} c = t u \mathfrak{b}' c' \neq 0$ für die Gültigkeit der Formel (42*) erfüllt sind, so besitzt das System (74) für jeden zulässigen Wert von $m = m_n$ die eindeutige Lösung

$$r = \frac{1}{\mathfrak{b}' c'} \left\{ \frac{p - m_n u}{s t} c' + m_n v [a' \mathfrak{b}']' \right\}, \quad (76)$$

wobei wegen $a c = 0$, aber $\mathfrak{b} c \neq 0$ auch $[a\mathfrak{b}] \neq 0$ und also auch $[a' \mathfrak{b}']' \neq 0$ ist.

⁸ S. Fußnote 4 von S. 130.

Obwohl a', b', c' ganze Vektoren sind, so wird doch die rechte Seite von (76) nicht ohne weiteres auch ein ganzer Vektor sein. Wir haben nun noch zu untersuchen, wann dieses wirklich eintritt.

Falls die Summe zweier einzügiger Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ein l -zügiger Vektor \mathfrak{C} ist, so ist schon die Summe der nichtganzen Vektoren \mathfrak{A}/l und \mathfrak{B}/l ein ganzer Vektor, nämlich \mathfrak{C}/l , und noch allgemeiner die Summe

$$\left(\frac{i}{l} + g_1\right)\mathfrak{A} + \left(\frac{i}{l} + g_2\right)\mathfrak{B} \quad \{i = 0, 1, 2, \dots, l-1; \quad g_1, g_2 \text{ ganze Zahlen}\},$$

und man macht sich leicht klar, daß dies die einzigen ganzen Vektoren von der Form $\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}$ sind. Demnach müssen wir gemäß (76) fordern, daß

$$\frac{p - m_n u}{s t b' c'} = \frac{i}{l} + g_1, \quad \frac{m_n v}{b' c'} = \frac{i}{l} + g_2 \quad (77)$$

wird, wo l die Zugzahl des Vektors $c' + [a' b']'$ und i die eine oder andere der Zahlen $0, 1, 2, \dots, l-1$ ist, und wobei g_1 und g_2 ganze Zahlen sind. Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man mit einem etwaigen größten gemeinsamen Teiler r der beiden Zahlen u und $s t v$ die hiernach teilerfremden Zahlen u' und $(s t v)'$ durch die Festsetzungen $u = r u'$ und $s t v = r (s t v)'$ einführt,

$$(s t v)' g_1 + u' g_2 = g^{(i)} \quad \text{mit} \quad g^{(i)} = \frac{p (s t v)'}{s t b' c'} - \frac{i}{l} (u' + (s t v)') \quad (78)$$

und

$$m_n = \frac{b' c'}{v} \left(\frac{i}{l} + g_2 \right). \quad (79)$$

Die Gl. (78) ist dann und nur dann diophantisch und hat also wegen ihrer teilerfremden Koeffizienten $(s t v)'$ und u' dann und nur dann eine einfache diophantische Menge von ganzen Lösungspaaren $(g_1^{(i)}, g_2^{(i)})$, wenn es unter den Zahlen $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ solche gibt, die zusammen mit den hier vorgeschriebenen Zahlen $p, s, t, u', (s t v)'$ und $b' c'$ sowie der Zugzahl l des Vektors $c' + [a' b']'$ die rechte Seite $g^{(i)}$ von (78) zu einer ganzen Zahl werden lassen. Zu jeder derartigen Zahl i existiert dann eine einfache diophantische Menge von ganzen Vektoren (76) oder einfacher geschrieben

$$r = \left(\frac{i}{l} + g_1^{(i)} \right) c' + \left(\frac{i}{l} + g_2^{(i)} \right) [a' b']'. \quad (80)$$

Diese Vektoren r sind aber nur dann die diophantischen Lösungsvektoren von (65), wenn die Zahl m_n (79) mit $g_2 = g_2^{(i)}$ eine ganze Zahl ist und zudem zu den ganzen Zahlen (75) gehört. [Man überzeugt sich an Hand von (74) leicht davon, daß andernfalls die ganzen Vektoren r (76) die Ausgangsgleichung (65) im allgemeinen nur für nicht ganze Vektoren b befriedigen würden.] Jedenfalls wird man für diesen Sonderfall $a c = c b = 0, b c \neq 0$ nur selten auf diophantische Lösungen stoßen; man kann aber recht wohl Beispiele angeben, bei denen diophantische Lösungen wirklich vorkommen.

Wenn weiter immer noch $b \neq 0$, nun aber $a c \neq 0$, jedoch $b c = 0$ ist, so muß nach (65*)

$$c b - b [a b] = 0 \quad (81)$$

sein, der Vektor b also auf dem Vektor $c - [a b]$ senkrecht stehen. Jetzt zerspaltet man (65) mit einer ganzen Zahl q in das System

$$[c r] = b - q a, \quad b r = q, \quad (82)$$

das wieder die Form (42) hat. Unsere jetzige Voraussetzung $b c = 0$ ist identisch mit der früheren Voraussetzung (44), und somit muß die frühere Lösbarkeitsbedingung (45) erfüllt sein, welche in unsere jetzigen Bezeichnungen umgeschrieben

$$[b b] = q (c - [a b]) \quad \text{oder auch} \quad q c = [b (b - q a)] \quad (83)$$

lautet. Die erste Form von (83) zeigt, daß diese Lösbarkeitsbedingung mit der als notwendig gefundenen Bedingung (81) verträglich ist. Die zweite Form von (83) zeigt, daß dann der Vektor c auf dem Vektor $b - qa$ senkrecht steht, wie es für die Lösbarkeit der ersten Gl. (82) zutreffen muß.

Es kann jetzt also für $ac \neq 0$, $bc = 0$ nur dann ganze Lösungen r geben, wenn die Forderung (81) erfüllt ist, und wenn eine ganze Zahl q existiert, die der Bedingung (83) genügt, und dann ist nach Ziffer V, Nr. 3 das System (82) und damit auch unsere Ausgangsgleichung (65) gleichwertig mit der ersten Gl. (82) allein. Nach dem Schlußsatz von Ziffer III gibt es also eine einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren r in diesem Falle dann und nur dann, wenn die Zugzahl des Vektors $b - qa$ gleich derjenigen von c oder ein ganzes Vielfaches von ihr ist.

Wenn, immer noch für $b \neq 0$, sowohl $ac = 0$ als auch $bc = 0$ ist, so muß nach der ersten Gl. (82) $cb = 0$ sein, und daher müssen nun die drei Vektoren a , b und b in einer Ebene (senkrecht zum Vektor c) liegen, so daß dann (81) von selbst erfüllt ist. Es gilt also auch hier die Lösbarkeitsbedingung (83), die die zweite Gl. (82) überflüssig macht und die diophantische Lösung von (65) auf die erste Gl. (82) zurückführt (Ziffer III).

Wir erwähnen hierbei noch zwei besondere Fälle:

a) Ist $[ab] = 0$, so gilt (71), und also wird aus der ersten Gl. (82) einfach

$$[cr] = (p' - q)a. \quad (84)$$

b) Ist $[hb] = 0$, so hat man zwei Unterfälle zu betrachten. Wenn erstens $c \neq [ab]$ ist, so folgt aus (83) der Wert $q = 0$, so daß die diophantische Lösung gemäß (82) auf die eine Gleichung

$$[cr] = b \quad (85)$$

zurückgeführt ist. Wenn aber zweitens $c = [ab]$ ist (was wegen $ac = bc = 0$ durchaus zutreffen kann), so bleibt nach (83) die ganze Zahl q zunächst noch unbestimmt. Jetzt ist die ganze Zahl q nur noch an die Forderung gebunden, daß wegen der ersten Gl. (82) die Zugzahl des Vektors $b - qa$ gleich derjenigen des Vektors c oder ein ganzes Vielfaches von ihr sein muß, wenn diophantische Lösungen existieren sollen, und hier hat man nun wieder zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

Wenn es keine ganze Zahl q gibt, die die genannte Forderung erfüllt — und man kann leicht Zahlenbeispiele hierfür angeben —, so existiert keine diophantische Lösung. Wenn es aber eine ganze Zahl q_0 gibt derart, daß die Zugzahl des Vektors $b - q_0a$ gleich der Zugzahl u des Vektors c oder das kleinstmögliche ganze Vielfache von ihr ist, so gibt es damit auch eine einfache diophantische Menge erlaubter ganzer Zahlen q , nämlich

$$q_n = q_0 + n \frac{u}{r} \quad (n \text{ jede ganze Zahl}), \quad (86)$$

wobei r der größte gemeinsame Teiler der Zugzahlen s und u der Vektoren a und c ist. Denn falls der Vektor $b - q_0a$ die Zugzahl u oder das kleinstmögliche ganze Vielfache von ihr besitzt, so hat auch der Vektor

$$b - q_n a \equiv b - q_0 a - n \frac{u}{r} a$$

die Zugzahl u oder ein ganzes Vielfaches von ihr. Und da die erste Gl. (82) ja für jeden solchen Vektor $b - q_n a$ eine einfache diophantische Menge von Lösungen zuläßt, so besitzt die Ausgangsgleichung (65) in diesem Falle sogar eine zweifache diophantische Menge von Lösungsvektoren.

Wenn endlich $\mathfrak{d} = 0$ ist, so hat die Gl. (65) die einfache diophantische Menge von Lösungsvektoren

$$\mathfrak{r} = \frac{n}{r} \{(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{b} [\mathfrak{a} \mathfrak{c}]) \mathfrak{c} - (\mathfrak{b} \mathfrak{c}) [\mathfrak{a} \mathfrak{c}]\} \quad (n \text{ jede ganze Zahl}), \quad (87)$$

wie man durch Einsetzen nachprüfen kann. Dabei ist r der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen $(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{b} [\mathfrak{a} \mathfrak{c}]) s$ und $(\mathfrak{b} \mathfrak{c}) t$, falls \mathfrak{c} ein s -zügiger und $[\mathfrak{a} \mathfrak{c}]$ ein t -zügiger Vektor ist. Und natürlich muß mit $\mathfrak{d} = 0$ nach (65) zugleich $\mathfrak{a} \mathfrak{c} = 0$ sein, da es sonst überhaupt keine Lösung geben kann.

3. Die Gleichung

$$\mathfrak{a} (\mathfrak{b} \mathfrak{r}) + \mathfrak{c} (\mathfrak{d} \mathfrak{r}) = \mathfrak{e} \quad (88)$$

fordert, daß die drei Vektoren \mathfrak{a} , \mathfrak{c} und \mathfrak{e} komplanar sind, da die Gleichung sonst einen Widerspruch darstellen würde. Dann aber sind die Zahlenfaktoren f und g eindeutig bekannt, mit denen man \mathfrak{a} und \mathfrak{c} multiplizieren muß, damit $f \mathfrak{a} + g \mathfrak{c} = \mathfrak{e}$ wird, und somit ist mit

$$\mathfrak{b} \mathfrak{r} = f, \quad \mathfrak{d} \mathfrak{r} = g \quad (89)$$

die diophantische Lösung von (88) auf Ziffer V, Nr. 2 zurückgeführt, falls f und g ganze Zahlen sind.

VIII. Lineare vierstufige Vektorgleichungen.

Die vierstufigen linearen Vektorgleichungen kann man in vielen Fällen auf solche von kleinerer Stufenzahl zurückführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

1. Die Gleichung

$$[\mathfrak{a} [\mathfrak{b} [\mathfrak{c} \mathfrak{r}]]] = \mathfrak{d} \quad (90)$$

wird durch die Zerspaltung in die beiden Gleichungen

$$[\mathfrak{a} \bar{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{d}, \quad [\mathfrak{b} [\mathfrak{c} \mathfrak{r}]] = \bar{\mathfrak{r}} \quad (91)$$

auf die Lösungsmethoden von Ziffer III und Ziffer VI, Nr. 1 zurückverwiesen.

2. Die Gleichung

$$\mathfrak{a} [\mathfrak{b} [\mathfrak{c} \mathfrak{r}]] = \mathfrak{d} \quad (92)$$

kann nach einer wenig bekannten Vektorformel auch in der Gestalt

$$\mathfrak{A} \mathfrak{r} = \mathfrak{d} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = [\mathfrak{c} [\mathfrak{b} \mathfrak{a}]] \quad (93)$$

geschrieben werden und ist also durch Ziffer IV erledigt.

3. Die Gleichung

$$\mathfrak{a} [\mathfrak{b} [\mathfrak{c} \mathfrak{r}]] + \mathfrak{d} \mathfrak{r} = \mathfrak{e} \quad (94)$$

endlich kann ebenso in der Gestalt

$$\mathfrak{B} \mathfrak{r} = \mathfrak{e} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B} = [\mathfrak{c} [\mathfrak{b} \mathfrak{a}]] + \mathfrak{d} \quad (95)$$

auf Ziffer IV zurückgeführt werden.

Ähnlich kann man bei vielen linearen höherstufigen Vektorgleichungen verfahren.

IX. Verallgemeinerungen.

Man könnte daran denken, statt des kubischen Punktgitters andere reguläre Punktgitter oder noch allgemeinere reguläre Punktsysteme⁹ zugrunde zu legen und

⁹ Über den Unterschied zwischen regulären Punktgittern und regulären Punktsystemen sehe man etwa D. Hilbert und S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, S. 50f. Berlin. 1932.

dann als ganze Vektoren in allgemeinerem Sinne solche zu bezeichnen, die von einem als Nullpunkt gewählten Gitter- oder Systempunkt zu den anderen Punkten des Gitters oder des Systems hinführen. Als Beispiele seien genannt: das Rhomboedergitter, dessen Punkte die Eckpunkte nicht von Würfeln, sondern von regulären Rhomboedern¹⁰ sind; kubische Gitter, bei denen aber nur die Punkte mit lauter geradzahligem Koordinaten mitzählen oder nur die Punkte mit lauter ungeradzahligem Koordinaten oder nur die Punkte, deren Koordinaten eine gerade Quersumme haben, oder nur die Punkte, deren Koordinaten eine ungerade Quersumme haben (Beispiel: das Natrium- und das Chlorgitter im Kochsalzkristall, wenn der Nullpunkt in einem Natriumatom liegt); ferner orthogonale Gitter, die in ein kubisches Gitter schräg eingebettet sind und in verschiedenen Richtungen verschiedene Seitenlängen haben, sog. orthotrope Gitter; schließlich reguläre Punktsysteme, die sich nicht als reguläre Gitter (also nicht als Gitter, deren sämtliche Punkte die Eckpunkte von Parallelepipeden ohne innere Punkte sind) darstellen lassen (Beispiel: das System des Diamantkristalles).

Ob ein solches reguläres Punktgitter oder Punktsystem für den vorliegenden Zweck brauchbar ist, hängt davon ab, ob es die (wie wir sagen wollen) multiplikative Eigenschaft hat, daß das vektorielle Produkt zweier in ihm als ganz definierter Vektoren jedesmal ebenfalls ein ganzer Vektor in dem Gitter oder System ist. Man erkennt durch eine einfache Rechnung, daß das Rhomboedergitter diese multiplikative Eigenschaft nicht besitzt und also einer diophantischen Theorie von der im vorhergehenden entwickelten Form nicht zugänglich ist, wohl aber die orthotropen Gitter, wie wir jetzt zum Schluß noch zeigen wollen.

Man kann ein orthotropes Gitter dadurch aus dem kubischen Gitter erzeugen, daß man drei (im kubischen Gitter) ganze einzügige Grundvektoren g_1, g_2, g_3 , die ein orthogonales Tripel bilden, auswählt und dann die Punkte des kubischen Gitters, die die Eckpunkte aller Vektoren

$$a = a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ jede ganze Zahl}) \quad (96)$$

sind, als Punkte des orthotropen Gitters definiert und also alle Vektoren von der Form (96) als ganze Vektoren in diesem orthotropen Gitter ansieht. Als Beispiel führen wir die drei einzügigen und offenbar ein orthogonales Tripel bildenden Grundvektoren $g_1(2, 1, 1)$, $g_2(-1, 1, 1)$, $g_3(0, -1, 1)$ an (dargestellt durch ihre Komponenten im kubischen Gitter). Das vektorielle Produkt des Vektors a (96) mit einem zweiten ganzen Vektor dieses orthotropen Gitters

$$r = x g_1 + y g_2 + z g_3 \quad (x, y, z \text{ ganze Zahlen}) \quad (97)$$

ist in der Tat ebenfalls ein ganzer Vektor b in diesem orthotropen Gitter, nämlich

$$b \equiv [a r] = b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 \quad (98)$$

mit den (wie man leicht ausrechnet) ganzzahligen „Komponenten“

$$b_1 = a_2 z - a_3 y, \quad b_2 = 2(a_3 x - a_1 z), \quad b_3 = 3(a_1 y - a_2 x).$$

Man kann somit die diophantische Grundaufgabe von Ziffer III ohne weiteres anwenden, wenn man dort $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ der Reihe nach ersetzt durch $a_1, a_2, a_3; b_1, \frac{1}{2} b_2, \frac{1}{3} b_3$, so daß also die im Schlußsatz von Ziffer III ausgesprochene Bedingung

¹⁰ Als reguläres Rhomboeder wird hier ein Körper bezeichnet, der aus einem regulären Oktaeder dadurch entsteht, daß auf zwei gegenüberliegenden Flächen je ein reguläres Tetraeder bündig aufgesetzt wird.

für die diophantische Lösbarkeit der Vektorgleichung $[ar] = b$ in unserem orthotropen Gitter (mit den Grundvektoren g_1, g_2, g_3) sich dahin erweitert, daß die „Komponente“ b_2 den Teiler 2, die „Komponente“ b_3 den Teiler 3 haben muß, und daß zudem ein etwaiger größter gemeinsamer Teiler s der drei „Komponenten“ a_1, a_2, a_3 auch ein gemeinsamer Teiler der drei ganzen Zahlen $b_1, \frac{1}{2}b_2, \frac{1}{3}b_3$ sein muß.

Es gilt nun aber, weit über dieses Beispiel hinaus, der allgemeine Satz:

Jedes orthotrope Gitter, das von drei einzügigen, zueinander orthogonalen Grundvektoren g_1, g_2, g_3 erzeugt ist, besitzt die multiplikative Eigenschaft und läßt die Anwendung der vorstehenden diophantischen Lösungsmethoden zu.

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß man zu jedem einzügigen Grundvektor g_1 gemäß Ziffer IV eine (offenbar einfache) diophantische Menge von zu ihm orthogonalen einzügigen Vektoren finden kann, unter denen wir einen beliebigen als zweiten einzügigen Grundvektor g_2 auswählen. Aus g_1 und g_2 entsteht dann der dritte einzügige Grundvektor

$$g_3 = \frac{1}{s} [g_1 g_2], \quad (99)$$

wenn s die Zugzahl des Vektorprodukts $[g_1 g_2]$ ist, welches auch bei einzügigen Faktoren g_1 und g_2 recht wohl mehrzügig sein kann.

Nun folgt aus (99) wegen $g_1 g_2 = 0$

$$[g_2 g_3] = \frac{g_2^2}{s} g_1, \quad [g_3 g_1] = \frac{g_1^2}{s} g_2, \quad [g_1 g_2] = s g_3, \quad (100)$$

und da das vektorielle Produkt zweier (im kubischen Gitter) ganzer Vektoren stets wieder ein ganzer Vektor (im kubischen Gitter) ist, so sind g_1^2/s und g_2^2/s stets ganze Zahlen, wie die drei orthogonalen einzügigen Grundvektoren g_1, g_2 und g_3 auch gewählt sein mögen. Dann hat das vektorielle Produkt b (98) der beiden (im orthotropen Gitter) ganzen Vektoren a (96) und r (97) zufolge (100) die „Komponenten“

$$b_1 = \frac{g_2^2}{s} (a_2 z - a_3 y), \quad b_2 = \frac{g_1^2}{s} (a_3 x - a_1 z), \quad b_3 = s (a_1 y - a_2 x), \quad (101)$$

und dies sind also lauter ganze Zahlen: der Produktvektor b ist im orthotropen Gitter (g_1, g_2, g_3) in der Tat ein ganzer Vektor.

Für die diophantische Lösbarkeit der Vektorgleichung $[ar] = b$ müssen nun die drei Zahlen $s b_1 g_2^2$, $s b_2 g_1^2$ und b_3/s ganze Zahlen sein und zudem einen etwaigen größten gemeinsamen Teiler von a_1, a_2, a_3 ebenfalls zum gemeinsamen Teiler haben.

Das skalare Produkt bietet keine Schwierigkeiten, und die frühere Grundgleichung (24) von Ziffer IV ist im orthotropen Gitter (g_1, g_2, g_3) in der Form

$$a_1 g_1^2 x + a_2 g_2^2 y + a_3 g_3^2 z = b \quad (102)$$

anzuwenden, also nach dem Verfahren von Ziffer IV mit $a_1 g_1^2$, $a_2 g_2^2$, $a_3 g_3^2$ statt a_x, a_y, a_z weiterzubehandeln. Die im Schlußergebnis von Ziffer IV ausgesprochene Bedingung für die diophantische Lösbarkeit der Vektorgleichung $ar = b$ ist jetzt dahin zu erweitern, daß ein etwaiger größter gemeinsamer Teiler der drei Zahlen $a_1 g_1^2$, $a_2 g_2^2$, $a_3 g_3^2$ ein Teiler von b sein muß.

Die Frage, ob es auch reguläre, aber nicht gitterförmige Punktsysteme mit der multiplikativen Eigenschaft gibt, scheint noch offen zu sein.

(Eingegangen am 31. März 1955.)

Der Energiestrom in elastischen Medien.

Von G. Heinrich, Wien.

Zusammenfassung. Anknüpfend an frühere Arbeiten des Verfassers, wird der Energietransport in elastischen Medien behandelt. Es wird eine Energieströmungsgeschwindigkeit eingeführt, die dem Energietransportvektor zugeordnet werden kann. Für die Spezialfälle der longitudinalen Stabschwingung, der transversalen Schwingung einer Saite und der Biegeschwingung eines Stabes wird der Energietransport und die Energieströmungsgeschwindigkeit genauer untersucht.

Summary. Starting from earlier results of the author, the energy transport in elastic media is discussed. An energy flow velocity is introduced that can be assigned to the vector of energy transport. Energy transport, as well as the energy flow velocity, are investigated in greater detail for the special cases of longitudinal bar vibrations, transversal vibrations of a chord, and of bending vibrations of a bar.

Résumé. En continuant des travaux précédents, l'auteur discute le transport d'énergie dans les milieux élastiques. Il introduit une vitesse d'écoulement de l'énergie qui peut être conjuguée au vecteur de transport d'énergie. Pour les cas particuliers de l'oscillation longitudinale d'une barre, de l'oscillation transversale d'une corde, et de l'oscillation de flexion d'une barre, le transport d'énergie et la vitesse d'écoulement de l'énergie sont analysés plus exactement.

In einem beliebigen, bewegten, materiellen Kontinuum läßt sich ein Energie-transportvektor \mathfrak{S} einführen, der so definiert werden kann, daß $\mathfrak{S} \cdot d\mathbf{o}$ die durch das raumfeste, vektorielle Flächenelement $d\mathbf{o}$ pro Zeiteinheit transportierte mechanische Energie bedeutet¹.

Die Möglichkeit der Einführung des Vektors \mathfrak{S} beruht auf der folgenden Beziehung, die aus der allgemeinen Bewegungsgleichung eines bewegten Kontinuums in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung gewonnen werden kann. Sie lautet:

$$\int \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \right] \cdot d\mathbf{o} = \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U \right) d\tau + \int [(\mathbf{V}, \mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{p}] d\tau. \quad (1)$$

Hierin bedeuten \mathbf{v} den Vektor der Geschwindigkeit des materiellen Kontinuums, $|\mathbf{v}|$ seinen absoluten Wert, ρ die Massendichte, U das zeitunabhängig angenommene Potential der Massenkräfte pro Masseneinheit und \mathbf{p} den Spannungsaffinor. Das Zeichen \cdot bedeutet skalares Produkt, $\cdot \cdot$ doppelt skalares Produkt und das Komma dyadisches Produkt. Das linksstehende Oberflächenintegral ist über eine beliebige, raumfeste Hüllfläche zu nehmen, die rechtsstehenden Volumsintegrale über das von der Hüllfläche eingeschlossene Volumen. Das Hüllflächenelement $d\mathbf{o}$ ist dabei nach innen gerichtet. Die Glieder der rechten Seite haben nun eine einfache physikalische Bedeutung. Das erste Volumsintegral ist die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung der Bewegungs- und der potentiellen Energie des herausgegriffenen Volumens, das zweite Volumsintegral stellt die negative Arbeit der inneren Kräfte des Kontinuums pro Zeiteinheit dar. Man kann daher das linksstehende Oberflächenintegral zwanglos als den pro Zeiteinheit durch die Hüllfläche erfolgenden Zustrom mechanischer Energie zur Deckung der im Innern stattfindenden Energieumsetzungen auffassen. Demnach kann man:

$$\mathfrak{S} = \mathbf{v} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \quad (2)$$

als Energietransportvektor definieren.

Streng genommen hat zwar nur das Oberflächenintegral von \mathfrak{S} über eine geschlossene Hüllfläche physikalische Bedeutung, so daß \mathfrak{S} nur bis auf einen quellfreien Vektor bestimmt ist. Doch ist die Form nach Gl. (2) die einfachste, deren Ober-

¹ Siehe G. Heinrich: Der Energietransport in strömenden Medien. Z. angew. Math. Mechan. 32, 286 (1952). — Ergänzungen zu dem Aufsatz „Der Energietransport in strömenden Medien“. Z. angew. Math. Mechan. 33, 109 (1953).

flächenintegral den gegebenen Wert besitzt, und es ist daher bequem, \mathfrak{S} direkt als Energietransportvektor zu deuten. Die Verhältnisse liegen ganz analog wie beim Poyntingschen Vektor der Elektrodynamik.

Die ersten zwei Glieder von Gl. (2) entsprechen dem Transport von Bewegungs- und potentieller Energie pro Zeiteinheit, das dritte Glied entspricht der auf die Sekunde bezogenen Deformationsarbeit. Man kann \mathfrak{S} in zwei Komponenten zerlegen:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_H + \mathfrak{S}_p, \quad (2a)$$

$$\mathfrak{S}_H = v \left(\frac{\varrho |v|^2}{2} + \varrho U \right), \quad (2b)$$

$$\mathfrak{S}_p = -v \cdot p. \quad (2c)$$

\mathfrak{S}_H hat immer die Richtung von v , während \mathfrak{S}_p im allgemeinen einen Winkel mit v einschließt.

Zur Darstellung von \mathfrak{S}_p in Komponenten schreiben wir p als symmetrische Matrix

$$p = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

worin die $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ Schnittspannungen bedeuten.

v schreiben wir als Spaltenvektor in der Form

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

und erhalten für \mathfrak{S}_p den Spaltenvektor:

$$\mathfrak{S}_p = -v \cdot p = -p \cdot v = - \begin{pmatrix} v_x \sigma_{xx} + v_y \sigma_{xy} + v_z \sigma_{xz} \\ v_x \sigma_{yx} + v_y \sigma_{yy} + v_z \sigma_{yz} \\ v_x \sigma_{zx} + v_y \sigma_{zy} + v_z \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Um Gl. (5) einfacher zu deuten, legen wir die positive x -Achse in die Richtung des Vektors v , dann wird $v_x = |v|$, $v_y = v_z = 0$ und wir erhalten:

$$\mathfrak{S}_p = -|v| \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = -|v| \overrightarrow{\sigma_v}. \quad (5a)$$

Darin ist $\overrightarrow{\sigma_v}$ der resultierende Spannungsvektor in einer Schnittfläche senkrecht zu v . Bei reiner Zugspannung ist also \mathfrak{S}_p der Bewegung entgegengerichtet, bei reiner Druckspannung liegt \mathfrak{S}_p in Richtung von v , während bei reiner Schubspannung \mathfrak{S}_p senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor liegt.

Wir spezialisieren nun auf das elastische Kontinuum und ermitteln hierfür den Wert von $(V, v) \cdot p$ gemäß Gl. (1). Wegen der Symmetrie von p kann man dafür auch schreiben:

$$(V, v) \cdot p = \frac{1}{2} [(V, v) + (v, V)] \cdot p. \quad (6)$$

Bedeutet

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

den Deformationsaffinor für das Elastikum mit der Symmetriebedingung $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$, dann gilt bekanntlich:

$$\frac{1}{2}[(\nabla, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla)] = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

worin die Punkte zeitliche Ableitungen bedeuten. Nach dem allgemeinen Hookeschen Gesetz gilt ferner:¹

$$\mathbf{p} = 2G \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

Hierin ist G der Schubmodul, ν die Poissonsche Zahl und

$$\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (8a)$$

die Volumsdilatation.

Aus den Gl. (6), (7) und (8) folgt schließlich in skalarer Darstellung:

$$(\nabla, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ G \left[(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta^2 \right] \right\}. \quad (9)$$

Nun ist aber der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck das elastische Potential U_{el} , bezogen auf die Volumseinheit.

Es gilt demnach:

$$(\nabla, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \frac{\partial U_{el}}{\partial t}. \quad (9a)$$

Damit nimmt Gl. (1) die Form an:

$$\int \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \right] \cdot d\mathbf{v} = \int \mathfrak{S} \cdot d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U + U_{el} \right) d\tau. \quad (10)$$

Gl. (10) hat nun die Form eines Erhaltungsgesetzes für die mechanische Energie. Diese besteht aus der Bewegungsenergie, der potentiellen Energie der Massenkkräfte und dem elastischen Potential. Die ganze durch die Hüllfläche zuströmende Energie dient zur Vergrößerung der mechanischen Energie des eingeschlossenen Teiles des Kontinuums. Es tritt also keine Energiedissipation auf.

Durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf $\int \mathfrak{S} \cdot d\mathbf{v}$ folgt aus Gl. (10):

$$\int \left(\nabla \cdot \mathfrak{S} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad (11)$$

mit:

$$H = \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \rho U + U_{el}. \quad (11a)$$

H hat die Bedeutung einer Energiedichte.

Da (11) für jedes beliebige Volumen gelten muß, folgt:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Gl. (12) hat die Form einer Kontinuitätsgleichung.

Gl. (12) legt es nun nahe, dem Energietransportvektor \mathfrak{S} einen Energieströmungsgeschwindigkeits-Vektor zuzuordnen².

Es sei k irgendeine skalare Verteilungsfunktion, die als Dichteverteilung für eine physikalische Größe K , die einem Erhaltungsgesetz genügt, aufgefaßt werden soll.

² Die folgenden Betrachtungen wurden durch eine Bemerkung von Prof. P. Funk angeregt.

Ist dann \mathfrak{S} der Transportvektor für die Größe K , das heißt bedeutet $\mathfrak{S} \cdot d\mathbf{v}$ die Menge von K , die pro Zeiteinheit durch das Flächenelement $d\mathbf{o}$ hindurchströmt, dann gilt wegen des Erhaltungsgesetzes für K die Gleichung:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0.$$

Ist z. B. $k = \varrho$ die Massendichte, dann ist der „Massentransportvektor“ $\mathfrak{S} = \varrho \mathbf{v}$ der Vektor der Impulsdichte, und man erhält die gewöhnliche Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

$\mathbf{v} = \frac{\mathfrak{S}}{\varrho}$ ist dann der Geschwindigkeitsvektor für die Massenströmung. Analog kann man ganz allgemein dem Transportvektor \mathfrak{S} einen Strömungsgeschwindigkeits-Vektor

$$\mathbf{w} = \frac{\mathfrak{S}}{k} \quad (13)$$

für die Strömung der Größe K zuordnen, die einem Erhaltungsgesetz genügt. Diese Betrachtung ließe sich auch auf beliebige vektorielle und tensorielle Größen erweitern, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Setzt man für k die Energiedichte H und für \mathfrak{S} den Energietransportvektor, so ergibt sich der Vektor der Energieströmungsgeschwindigkeit \mathbf{w} für elastische Medien nach Gl. (2a), (2b), (2c), (5), (10), (11a) und (13) zu

$$\mathbf{w} = \frac{\mathfrak{S}}{H} = \frac{\varrho \mathbf{v} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) - |\mathbf{v}| \cdot \vec{\sigma}_v}{\varrho \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U \right) + U_{el}}. \quad (14)$$

Durch Gl. (14) wird also dem Energietransportvektor ein gleichgerichteter Geschwindigkeitsvektor zugeordnet, der der Strömungsgeschwindigkeit der quasi als Substanz aufgefaßten mechanischen Energie entspricht. Allerdings ist der Betrag von \mathbf{w} nur dann eindeutig bestimmt, wenn über den Nullpunkt der Energiedichte verfügt wird. Die Verfügung ist so lange problematisch, als das Potential U der Massenkräfte eine Rolle spielt. Wir beschränken uns daher im folgenden auf solche Fälle, in denen die Massenkräfte keine Rolle spielen und normieren dann $U = 0$. Wir verwenden daher Gl. (14) in der Form:

$$\mathbf{w} = \frac{\varrho \mathbf{v} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - |\mathbf{v}| \vec{\sigma}_v}{\varrho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + U_{el}}. \quad (14a)$$

Wir werden Gl. (14a) auf elastische Schwingungsvorgänge anwenden. Wir setzen dann für den schwingungsfreien Zustand $U_{el} = 0$. Dann enthält der Nenner von (14a) nur jene Energiedichte, die beim Schwingungsvorgang selbst umgesetzt wird und ist somit physikalisch eindeutig definiert. Damit wird \mathbf{w} zu einer physikalisch sinnvollen Größe.

Es soll nun der Energietransport und die Energieströmungsgeschwindigkeit für Spezialfälle untersucht werden.

Wir betrachten zunächst die Ausbreitung von elastischen Longitudinalwellen in einem unendlich langen, geraden, homogenen Stab. Ist $\xi = \xi(x, t)$ die Verschiebung eines Massenelements, so gilt bekanntlich:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (15)$$

mit

$$a^2 = \frac{E}{\varrho} \quad (15a)$$

(E = Elastizitätsmodul, ϱ = Masse pro Volumseinheit). Ferner gilt:

$$\sigma_{xx} = \sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (16)$$

während alle anderen Komponenten des Spannungsaffinors verschwinden. Schließlich ist

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v_y = v_z = 0. \quad (17)$$

Setzt man $\mathfrak{S}_p = e_x S_{px}$, so folgt aus Gl. (5) (e_x = Einheitsvektor in Richtung x):

$$S_{px} = -E \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (18)$$

Es findet nur ein Energietransport in der x -Richtung statt. Um diesen zu berechnen, betrachten wir eine in der positiven x -Richtung laufende Welle mit der Gleichung:

$$\xi = f(x - at), \quad (19)$$

die bekanntlich für jede zweimal differenzierbare Funktion f eine Lösung von Gl. (15) darstellt.

Aus Gl. (17) und (18) ergibt sich:

$$S_{px} = E \cdot a \cdot f'^2 \quad (20)$$

mit

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (20a)$$

Ebenso folgt aus $\mathfrak{S}_H = e_x S_{Hx}$ sowie aus Gl. (2b), (15a) und (17):

$$S_{Hx} = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^3 = -\frac{1}{2} E a f'^3. \quad (21)$$

Der gesamte Energietransport, der ganz in die x -Richtung fällt, ist somit:

$$S_x = S_{px} + S_{Hx} = E \cdot a \cdot f'^2 \left(1 - \frac{1}{2} f' \right). \quad (22)$$

Die Energiedichte H ergibt sich aus (11a), (16) und (17) mit $U = 0$ und $U_{el} = \frac{\sigma^2}{2E}$ zu:

$$H = \frac{1}{2} \left[\varrho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right],$$

oder nach Gl. (15a) und (19):

$$H = E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = E \cdot f'^2. \quad (23)$$

Setzt man die Energieströmungsgeschwindigkeit $w = e_x w_x$, so erhält man nach Gl. (14):

$$w_x = a \left(1 - \frac{1}{2} f' \right). \quad (24)$$

Für einen begrenzten Wellenzug, der im Endlichen beginnt und endet, ist der zeitliche Mittelwert \bar{w}_x von w_x gleich der Phasengeschwindigkeit a der Welle. Ist nämlich T die Zeit, während der ein fester Punkt vom Wellenzug überlaufen wird, dann ist wegen (19) und (20a):

$$\bar{w}_x = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a \left(1 - \frac{1}{2} f' \right) dt = a + \frac{1}{2} a^2 \int_t^{t+T} \frac{\partial f}{\partial t} dt = a,$$

da f zur Zeit t (Beginn des Durchlaufens des Wellenzuges) und zur Zeit $t + T$ (Ende des Durchlaufens des Wellenzuges) nach Voraussetzung verschwindet. Auch bei unendlichen periodischen Wellen ist, wie man sofort sieht, $\bar{w}_x = a$. Das Glied $-\frac{a}{2} f'$

rührt vom Transport der Bewegungsenergie her. Die Bewegungsenergie pendelt aber bei periodischen Wellen nur hin und her, ihr Transport ist im Mittel Null.

Als zweites Beispiel diene die transversal schwingende, unendlich lange, homogene Saite. Die Differentialgleichung ihrer Bewegung lautet bekanntlich:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (25)$$

mit:

$$a^2 = \frac{P}{\mu}, \quad (25a)$$

wenn y die Auslenkung, P die Spannung und μ die auf die Längeneinheit bezogene Masse der Saite bedeuten. Es gilt nun:

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (26)$$

Ist ferner F der Querschnitt der Saite und ϑ der Winkel des betrachteten Saitenelements gegen die x -Achse, so ist F_y die Querschnittsfläche senkrecht zur y -Achse, gegeben durch:

$$F_y = \frac{F}{\sin \vartheta}. \quad (27)$$

Es gilt dann:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{P \cdot \cos \vartheta}{F_y} = \frac{P}{F} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta. \quad (28)$$

Ebenso wird:

$$\sigma_{yy} = \frac{P \cdot \sin \vartheta}{F_y} = \frac{P}{F} \cdot \sin^2 \vartheta. \quad (29)$$

Schließlich ist $\sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 0$. Aus Gl. (26) bis (29) erhält man, wenn man in Gl. (5) einsetzt:

$$\mathfrak{S}_p = -e_x v_y \frac{P}{F} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - e_y v_y \frac{P}{F} \sin^2 \vartheta. \quad (30)$$

Die Differentialgleichung (25) setzt kleine Winkel ϑ voraus, für die $\sin \vartheta \approx \vartheta$ und $\cos \vartheta \approx 1$ gesetzt werden kann.

Setzt man $\mathfrak{S}_p = e_x S_{px} + e_y S_{py}$, so erhält man aus (30) mit der angegebenen Näherung:

$$S_{px} = -\frac{P}{F} v_y \cdot \vartheta = -\frac{P}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (31)$$

$$S_{py} = -\frac{P}{F} v_y \vartheta^2 = -\frac{P}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (32)$$

Ebenso erhält man aus Gl. (2b) für $U = 0$:

$$\mathfrak{S}_H = e_y \cdot S_{Hy} = e_y \frac{\varrho v_y^3}{2}.$$

Mit $\varrho = \frac{\mu}{F}$ wird daraus:

$$S_{Hy} = \frac{\mu}{2F} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3. \quad (33)$$

Es ist also:

$$\left. \begin{aligned} S_x = S_{px} &= -\frac{P}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \\ S_y = S_{py} + S_{Hy} &= \frac{\mu}{2F} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 - \frac{P}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Um die Energiedichte H zu ermitteln, benötigen wir die elastische Energie pro Volumeneinheit, die durch die Auslenkung erzeugt wird. Sie ist:

$$U_{el} = \frac{P}{F} \frac{ds - dx}{ds} = \frac{P}{F} (1 - \cos \vartheta) \approx \frac{P}{2F} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (35)$$

Die Bewegungsenergie pro Volumseinheit ist:

$$T = \frac{\mu}{2F} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (36)$$

Damit ergibt sich:

$$H = T + U_{el} = \frac{1}{2F} \left[P \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (37)$$

Für einen in der Richtung der positiven x -Achse laufenden Wellenzug gilt:

$$y = f(x - at). \quad (38)$$

Durch Einsetzen in (34) erhält man bei Beachtung von (25a) und (38):

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{\mu a^3}{F} f'^2, \\ S_y &= \frac{\mu a^3}{2F} f'^3 \\ \text{mit } f' &= \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (34a)$$

Ferner folgt aus (37) bei Verwendung von (25a) und (38):

$$H = \frac{\mu a^3}{F} \cdot f'^2. \quad (37a)$$

Die Komponenten w_x und w_y der Energieströmungsgeschwindigkeit ergeben sich daher aus (34a) und (37a) zu:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{S_x}{H} = a, \\ w_y &= \frac{S_y}{H} = \frac{a f'}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Längs der Saite wird also die Energie mit der Phasengeschwindigkeit a transportiert, senkrecht dazu ergibt sich eine von der Zeit abhängige Geschwindigkeit, die für periodische Bewegungen im Mittel verschwindet.

Für harmonische Wellen von der Form:

$$y = A \sin \frac{1}{\lambda} (x - at),$$

worin λ die Wellenlänge bedeutet, ist S_x und S_y nach (34a):

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\mu a^3}{F \cdot \lambda^2} A^2 \cos^2 \frac{1}{\lambda} (x - at), \\ S_y &= \frac{\mu a^3}{F \cdot \lambda^3} A^3 \cos^3 \frac{1}{\lambda} (x - at). \end{aligned}$$

Die zeitlichen Mittelwerte \bar{S}_x und \bar{S}_y ergeben sich daraus zu:

$$\bar{S}_x = \frac{\mu a^3}{2F \lambda^2} A^2 \quad \text{und} \quad \bar{S}_y = 0.$$

Es findet im Mittel also nur ein Energietransport längs der Saite statt, was nach der Form von (34a) für jede periodische Wellenbewegung zutrifft.

Zuletzt soll noch der Fall der Ausbreitung transversaler Wellen längs eines homogenen elastischen Stabes behandelt werden. Benützt man die Bernoullische Näherung vom Ebenbleiben der Querschnitte und bedeutet y die als klein vorausgesetzte Auslenkung der Stabachse senkrecht zur Achse des Stabes (x -Richtung), so gilt die Differentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= -a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \text{mit } a &= \sqrt{\frac{e F}{E J}}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Hierin bedeuten ϱ die Dichte, F den Querschnitt, E den Elastizitätsmodul und J das Trägheitsmoment des Stabes in bezug auf eine Achse durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur x - und y -Achse. Die durch den Schwerpunkt gelegte y -Achse wird als Hauptträgheitsachse vorausgesetzt. Wir begnügen uns hier damit, mit über den Querschnitt gemittelten Werten des Energietransportvektors und der Energiedichte zu rechnen. Es gilt wieder:

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ferner ist der Mittelwert $\bar{\sigma}_{xy}$ von σ_{xy} gegeben durch:

$$\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{yx} = \frac{1}{F} \frac{\partial M}{\partial x} = - \frac{EJ}{F} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

wenn M das Bieugungsmoment bedeutet. Ferner ist $\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = 0$. Damit folgt aus Gl. (5):

$$\mathfrak{S}_v = e_x \frac{EJ}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

oder

$$S_{vx} = \frac{EJ}{F} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (41)$$

Ebenso folgt \mathfrak{S}_H nach Gl. (2b) mit $U = 0$:

$$\mathfrak{S}_H = e_y \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3,$$

oder

$$S_{Hy} = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3. \quad (42)$$

Um die Energiedichte H zu ermitteln, benötigen wir das elastische Potential U_{el} pro Volumeneinheit. Der zugrunde gelegten Näherung (Ebenbleiben des Querschnittes) entsprechend, hat es den Wert:

$$U_{el} = - \frac{M}{2F} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{EJ}{2F} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2. \quad (43)$$

Die auf die Volumeneinheit bezogene Bewegungsenergie beträgt:

$$T = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (44)$$

Aus (43) und (44) ergibt sich, bei Beachtung von (40):

$$H = U_{el} + T = \frac{EJ}{2F} \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (45)$$

Wir betrachten nun speziell eine monochromatische Welle mit der Wellenlänge λ , die sich längs der positiven x -Achse des unendlich lang gedachten Stabes ausbreitet. Diesem Fall entspricht die Lösung:

$$y = A \sin \frac{1}{\lambda} (x - vt) \quad (46)$$

mit

$$v = \frac{1}{a \lambda}.$$

v ist die Phasengeschwindigkeit der elastischen Welle. Durch Einsetzen von (46) in (41) und (42) erhält man bei Beachtung von Gl. (40):

$$\left. \begin{aligned} S_{vx} &= \frac{EJ}{F \cdot a} \frac{A^2}{\lambda^5} \cos^2 \frac{1}{\lambda} (x - vt), \\ S_{Hy} &= \frac{EJ}{2F a} \frac{A^3}{\lambda^6} \sin^3 \frac{1}{\lambda} (x - vt). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Die zeitlichen Mittelwerte der Energietransportbeträge sind:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{px} &= \frac{EJ}{2F} \frac{A^2}{\lambda^5}, \\ \bar{S}_{Hy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

Die Energiedichte ergibt sich aus Gl. (45) bei Verwendung von (40) und (46) zu:

$$H = \frac{EJ}{2F} \frac{A^2}{\lambda^4}. \quad (48)$$

Damit erhält man die Komponenten der Energieströmungsgeschwindigkeiten w_x und w_y zu:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{S_{px}}{H} = 2v \cos^2 \frac{1}{\lambda} (x - vt), \\ w_y &= \frac{S_{Hy}}{H} = \frac{A}{\lambda} v \sin^2 \frac{1}{\lambda} (x - vt). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die zeitlichen Mittelwerte \bar{w}_x und \bar{w}_y sind:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_x &= v, \\ \bar{w}_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

Die mittlere Energieströmungsgeschwindigkeit ist also wieder gleich der Phasengeschwindigkeit der elastischen Welle in der Ausbreitungsrichtung.

Wir wollen nun noch die Ausbreitung einer Wellengruppe in Richtung der positiven x -Achse untersuchen. Dazu denken wir uns zwei Wellen gleicher Amplitude, aber mit etwas verschiedenen Wellenlängen λ_1 und λ_2 und setzen demnach:

$$y = A \left[\sin \frac{1}{\lambda_1} \left(x - \frac{t}{a \lambda_1} \right) + \sin \frac{1}{\lambda_2} \left(x - \frac{t}{a \lambda_2} \right) \right]; \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda. \quad (50)$$

Durch Einsetzen in Gl. (41) erhält man daraus, wenn man Glieder von der Größenordnung $\Delta\lambda$ vernachlässigt, nach einigen Umformungen:

$$S_{px} = \frac{4EJ}{F} \frac{A^2}{a \lambda^5} \cos^2 \frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{t}{a \lambda} \right) \cos^2 \frac{\Delta\lambda}{2 \lambda^2} \left(x - \frac{2t}{a \lambda} \right). \quad (51)$$

Der Energietransport in der y -Richtung, der wieder im zeitlichen Mittel verschwindet, soll hier nicht weiter untersucht werden.

Analog ergibt sich aus Gl. (45) der Ausdruck:

$$H = \frac{2EJ}{F} \frac{A^2}{\lambda^4} \cos^2 \frac{\Delta\lambda}{2 \lambda^2} \left(x - \frac{2t}{a \lambda} \right). \quad (52)$$

Zum Unterschied von der monochromatischen Welle ist hier die Energiedichte selbst eine Funktion von x und t , die sich mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{a \lambda} = 2v$$

ausbreitet. Dies ist zugleich die Gruppengeschwindigkeit der betrachteten Wellengruppe. Hingegen erhält man für die Energieströmungsgeschwindigkeit nach (51) und (52) den Wert:

$$w_x = \frac{S_{px}}{H} = \frac{2}{a \lambda} \cos^2 \frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{t}{a \lambda} \right) = 2v \cos^2 \frac{1}{\lambda} (x - vt).$$

Dies ist derselbe Wert wie der für die monochromatische Welle und es gilt wieder $w_x = v$. Auch hier ist der zeitliche Mittelwert der Energieströmungsgeschwindigkeit wieder die Phasengeschwindigkeit der Einzelwelle. Die Gruppengeschwindigkeit darf daher nicht als Energieströmungsgeschwindigkeit aufgefaßt werden, sondern sie ist, energetisch betrachtet, die Phasengeschwindigkeit der Energiedichte. Die mechanische Energie strömt hier also nur halb so schnell, als die Phase der Energiedichte fort-schreitet.

(Eingegangen am 22. Februar 1955.)

Zur Berechnung rotierender Scheiben vorgegebenen Profils.

Von K. Karas, Darmstadt*.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In Weiterführung des Donathschen Verfahrens wird eine Methode entwickelt, die graphisch und analytisch den Spannungszustand in Scheiben vorgegebenen Profils zu ermitteln gestattet. Dabei wird die Scheibe durch ein stufenförmiges Treppenprofil ersetzt. Durch eine geeignete Transformation wird erreicht, daß an Stelle des Donathschen Diagramms mit Kurven von zweiter und vierter Ordnung einfach zwei gewöhnliche Hyperbeln treten. Der Ruhespannungszustand wird durch Ursprungsgeraden erfaßt.

Summary. In continuation of the Donath proceeding a method is developed which allows to ascertain graphically and analytically the state of tension in disks of an alleged profile. Thereby the disk is replaced by a graded stair profile. By a suitable transformation one obtains that instead of the Donath diagram, with curves of the second and fourth order, just two ordinary hyperbolas appear. The state of stresses at rest is caught hold of by simple elementary straight lines.

Résumé. En continuant le procédé de Donath, on développe une méthode qui permet de trouver graphiquement et analytiquement l'état de tension dans des disques d'un profil allégué. En même temps on remplace le disque par un profil d'escalier échelonné. Par une transformation appropriée on obtient qu'à la place du diagram de Donath, avec ses courbes de deuxième et quatrième ordre, paraissent simplement deux hyperboles ordinaires. L'état de tension au repos est saisi par de simples lignes droites primaordiales.

I. Einleitung.

Die Festigkeitsberechnung umlaufender Scheiben vorgegebenen Profils erfolgt, da sich im allgemeinen die zugehörigen Differentialgleichungen nicht in geschlossener Form integrieren lassen, indem man die gegebene Scheibe durch ein stufenförmiges Gebilde ersetzt, dessen kreisringförmige Teile als Scheiben gleicher Dicke dargestellt werden können.

Die praktische Durchrechnung dieser stufenförmigen Ersatzscheibe erfolgt heute hauptsächlich nach zwei Verfahren, dem von R. Grammel¹, für welches² eigene Rechenformulare zur Verfügung gestellt sind und das derzeit wohl am raschesten diese Aufgabe bewältigen läßt, sowie dem von M. Donath³, das zu dieser Lösung sich eines ein für allemal gezeichneten Kurvenblattes bedient. Während das Verfahren von R. Grammel sowohl numerisch als auch numerisch-graphisch durchgeführt werden kann, ist das von M. Donath nur in letzterer Form zu erledigen^{4, 5}.

In beiden Verfahren kann man sich nach R. v. Mises vorgeschriebenen Randbedingungen der Radialspannungen nur durch sinngemäße Überlagerung zweier Spannungszustände mit willkürlichen Annahmen der Tangentialrandspannungen anpassen, von denen sich einer auf den Ruhestand der Scheibe bezieht. Gerade der letztere ist aber beim Donathschen Verfahren nicht ohne weiteres zu ermitteln, da das zugehörige Kurvenblatt (es würde sich um Scharen kubischer Hyperbeln handeln) bisher fehlt⁶.

* Der Verfasser wurde bei der Zeichnung der Abbildungen und bei der Durchrechnung der Tabellen von Herrn Dr. Ing. H. Weirich in dankenswerter Weise unterstützt.

¹ R. Grammel: Ein neues Verfahren zur Berechnung rotierender Scheiben. Dingers polytechn. J. 338, 217 (1923).

² C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, 2 Bd., S. 12. Berlin-Göttingen-Heidelberg. 1953.

³ M. Donath: Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe nach einem neuen Verfahren, 2. Aufl. Berlin. 1929.

⁴ J. Malkin: Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, 2. Kap., S. 23 bis 44. Berlin. 1935.

⁵ A. Stodola: Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl., S. 338. 1924.

⁶ Die MAN hat allerdings, wie bekannt wurde, diese Ergänzung durchgeführt, jedoch nicht veröffentlicht.

Abgesehen von diesem Mangel erweist sich das Verfahren von Donath als sehr mühsam und langwierig, trotzdem aber ist es schwer zu entbehren, da die ja auch beim Grammelschen Verfahren vorhandene Fehlerfortpflanzung einer unabhängigen Kontrolle bedürftig ist. Im folgenden wird in Weiterführung der Donathschen Ansätze ein Verfahren entwickelt, das sich sowohl graphisch als auch analytisch durchführen läßt, außerordentlich rasch erledigt werden kann und die Ergebnisse mindestens mit der bisher erhaltenen Genauigkeit liefert. Die graphische Durchführung des Verfahrens, das am besten gemeinsam mit dem Grammelschen Verfahren zwecks Erhalt einer schrittweisen Kontrolle durchgezeichnet oder durchgerechnet werden möge, benötigt durchweg nur gerade Linien und statt der bisherigen Kurvenschar zum Teil vierter Ordnung nur zwei ein für allemal zu zeichnende Hyperbeln.

II. Herleitung der Grundgleichungen.

Bei der Ringscheibe gleicher Dicke gelten für die Radialverschiebung ξ sowie für die Radial- und Ringspannung σ_r bzw. σ_φ die Formeln

$$\xi = -\frac{A r^3}{8} + b_1 r + \frac{b_2}{r}, \quad A = (1 - \nu^2) \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{E}, \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(- (3 + \nu) \frac{A r^2}{8} + (1 + \nu) b_1 - (1 - \nu) \frac{b_2}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(- (1 + 3 \nu) \frac{A r^2}{8} + (1 + \nu) b_1 + (1 - \nu) \frac{b_2}{r^2} \right). \quad (3)$$

Hierin bedeuten nach Abb. 1 r den Abstand von der Drehachse, $\nu = \frac{1}{m}$ die Querdehnungszahl, E den Elastizitätsmodul, γ das Einheitsgewicht des Scheibenmaterials und ω die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, während b_1, b_2 Konstanten sind, die aus den vorgegebenen Randbedingungen der Radialspannung bestimmt werden können. Addition und Subtraktion von (2) und (3) ergeben

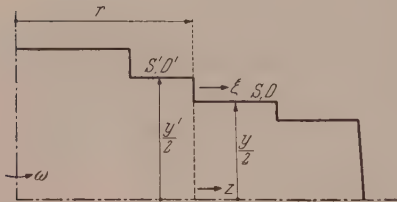


Abb. 1. Bezeichnungen der Spannungssumme $S = \sigma_\varphi + \sigma_r$, der Spannungsdifferenz $D = \sigma_\varphi - \sigma_r$, sowie der Profildicke y rechts und links einer Sprungstelle des Abstandes r von der Drehachse.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi + \sigma_r = S &= \frac{4 E}{1 - \nu} \left(-\frac{A r^2}{8} + \frac{b_1}{2} \right), \\ \sigma_\varphi - \sigma_r = D &= \frac{2 E}{1 + \nu} \left(\frac{A r^2}{8} + \frac{b_2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4a, b)$$

Drückt man aus (4a, b) b_1 und b_2 durch S und D aus und führt die Ergebnisse in (1) ein, so erhält man

$$\frac{2 E \xi}{r} = S (1 - \nu) + D (1 + \nu). \quad (5)$$

Da nun an der Grenze r zweier Ringscheiben die Radialverschiebung wegen des Zusammenhanges denselben Wert behält, so sind sich an dieser Stelle auch die rechten Seiten von (5) gleich und es folgt

$$S (1 - \nu) + D (1 + \nu) = S' (1 - \nu) + D' (1 + \nu). \quad (6)$$

Wegen (4a, b) folgt hieraus auch

$$(\sigma_r - \sigma_r') \nu = (\sigma_\varphi - \sigma_\varphi') \quad (7)$$

oder

$$\Delta \sigma_r \nu = \Delta \sigma_\varphi. \quad (7a)$$

Wird ferner an der Grenze r eine radiale Kraft z kp je Längeneinheit des Kreisbogens vom Radius r übertragen, so erfordert die Kontinuität des radialen Kraftstromes die Gleichung

$$\sigma_r y + z = \sigma_r' y' \quad (8)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_r &= \sigma_r - \sigma_r' = \sigma_r \left(1 - \frac{y}{y'}\right) - \frac{z}{y'}, \\ \Delta\sigma_\varphi &= \nu \Delta\sigma_r = \nu \left[\sigma_r \left(1 - \frac{y}{y'}\right) - \frac{z}{y'} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9a, b)$$

Aus (9a, b) folgt wegen $\Delta\sigma_\varphi + \Delta\sigma_r = \Delta S$, $\Delta\sigma_\varphi - \Delta\sigma_r = \Delta D$ durch Addition bzw. Subtraktion

$$\left. \begin{aligned} \Delta S &= S - S' = (1 + \nu) \Delta\sigma_r = (1 + \nu) (\sigma_r - \sigma_r'), \\ \Delta D &= D - D' = (\nu - 1) \Delta\sigma_r = (\nu - 1) (\sigma_r - \sigma_r'), \end{aligned} \right\} \quad (10a, b)$$

woraus noch

$$\Delta D = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \Delta S \quad (11)^7$$

und wegen (8) und (10a) auch

$$y' = \frac{\sigma_r y + z}{\sigma_r - \frac{\Delta S}{1 + \nu}} \quad (12)$$

folgt. Ist schließlich u die dem Halbmesser r entsprechende Umfangsgeschwindigkeit, so folgert man aus (4a, b) mit K_1 und K_2 als neuen Integrationskonstanten statt b_1 und b_2

$$\left. \begin{aligned} S(u) &= \frac{1 + \nu}{2} \frac{\gamma}{g} (-u^2 + K_1), \\ D(u) &= \frac{1 - \nu}{4} \frac{\gamma}{g} \left(u^2 + \frac{K_2}{u^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (13a, b)$$

(13a, b) sind die Kurven des Donathschen Kurvenblattes. $S(u)$ ergibt für verschiedene Werte von K_1 gegeneinander in Richtung der Ordinatenachse verschobene kongruente Parabeln mit der Ordinatenachse als gemeinsamer Achse. $D(u)$ stellt hingegen eine Schar von Kurven vierter Ordnung dar, die sich mit verschiedenen Werten von K_2 gestaltlich ändern.

Für die ruhende Scheibe ist mit $\omega = 0$ nach (1) auch $A = 0$ und (4a, b) ergeben daher mit den Konstanten K_1^0 und K_2^0 statt b_1 und b_2

$$S(u) = K_1^0, \quad D(u) = \frac{K_2^0}{u^2}. \quad (14a, b)$$

Es empfiehlt sich weiterhin statt der Umfangsgeschwindigkeit u die neue unabhängige Veränderliche

$$w = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{r^2 \omega^2} \quad (15)$$

einzuführen⁸. Dann erhält man statt (13a, b) und (14a, b) die einfacheren Gleichungen mit etwas abgeänderten Werten der Konstanten K

$$\left. \begin{aligned} S(w) &= -\frac{1 + \nu}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w} + \bar{K}_1 = S_1(w) + \bar{K}_1 = \left(-\frac{520 \cdot 1325155}{w} + \bar{K}_1 \right) \text{kp/m}^2, \\ D(w) &= \frac{1 - \nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w} + \bar{K}_2 w = D_1(w) + \bar{K}_2 w = \left(\frac{140 \cdot 0356772}{w} + \bar{K}_2 w \right) \text{kp/m}^2, \end{aligned} \right\} \quad (16a, b)$$

⁷ Bei M. Donath³ befindet sich auf der rechten Seite der bezüglichen Gleichung — dort mit (16) bezeichnet — ein offenbar unberechtigtes Minuszeichen.

⁸ R. Grammel² führt durch Gl. (1), S. 12, analog statt r die neue unabhängige Veränderliche $x = \frac{1}{r^2}$ ein.

worin $\nu = 0.3$, $\frac{\gamma}{g} = \frac{7.85 \cdot 10^3}{9.81} = 800.20387 \frac{k p s^2}{m^4}$ gesetzt wurde. Für die ruhende Scheibe folgt

$$S(w) = K_1^0, \quad D(w) = K_2^0 w. \quad (17a, b)$$

Aus (4a, b) erhält man bei bekannten Werten von S und D schließlich

$$\sigma_r = \frac{S-D}{2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{S+D}{2}. \quad (18a, b)$$

Was die geforderten Randbedingungen bei Vollscheiben gleicher Dicke betrifft, so ist hier in der Drehachse $w = \infty$ und $\sigma_r = \sigma_\varphi$, was wegen (18a, b) $D(\infty) = 0$ bedingt. Dann folgt aber aus (16b) bzw. (17b) $\bar{K}_2 = 0$ bzw. $K_2^0 = 0$. Ist ferner am Außenrand $r = r_a$, somit $w = w_a$, $\sigma_r = \sigma_{r_a}$ vorgeschrieben, so folgt zunächst aus (16b)

$$D_a = \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_a}$$

und aus (18a)

$$S_a = D_a + 2\sigma_{r_a},$$

womit auch nach (16a) die Konstante \bar{K}_1 , somit $S(w)$ bekannt sind. Es ergibt sich

$$\bar{K}_1 = \frac{3+\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_a} + 2\sigma_{r_a}, \quad \bar{K}_2 = 0. \quad (19a, b)$$

Bei Kreisringscheiben gleicher Dicke sind als geforderte Randbedingungen im allgemeinen σ_{r_i} und σ_{r_a} für $w = w_i$ und $w = w_a$ vorgeschrieben. Aus (18a) erhält man

$$S_i = D_i + 2\sigma_{r_i} \quad \text{und} \quad S_a = D_a + 2\sigma_{r_a}.$$

Führt man hierin (16a, b) ein, so ergeben sich für \bar{K}_1 bzw. \bar{K}_2 zwei Gleichungen mit den Lösungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_1 &= \frac{3+\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{w_i + w_a}{w_i w_a} + 2 \frac{\sigma_{r_a} w_i - \sigma_{r_i} w_a}{w_i - w_a}, \\ \bar{K}_2 &= \frac{3+\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_i w_a} - 2 \frac{\sigma_{r_i} - \sigma_{r_a}}{w_i - w_a}. \end{aligned} \right\} \quad (20a, b)$$

Ruhen die Scheiben, so greift man am besten auf die Gl. (1) bis (3) zurück. Dann ist mit $\omega = 0$ auch $A = 0$ und wegen $\sigma_r = \sigma_\varphi$ in Scheibenmitte $r = 0$ folgt für die Vollscheibe $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_{r_a}$, wie sich auch aus den untenstehenden Gl. (21a, b) für $r_i = 0$ ergibt. Für die Kreisringscheibe folgt aus (2)

$$\sigma_{r_i} = \frac{E}{1-\nu} b_1 - \frac{E}{1+\nu} \frac{b_2}{r_i^2},$$

$$\sigma_{r_a} = \frac{E}{1-\nu} b_1 - \frac{E}{1+\nu} \frac{b_2}{r_a^2},$$

also

$$b_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{\sigma_{r_a} r_a^2 - \sigma_{r_i} r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$b_2 = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{r_a} - \sigma_{r_i}) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Damit folgen aus (2) und (3) mit $A = 0$ die sogenannten Lameschen Gleichungen

$$\sigma_\varphi^r = \frac{\sigma_{r_a} r_a^2 - \sigma_{r_i} r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \mp (\sigma_{r_a} - \sigma_{r_i}) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2}. \quad (21a, b)$$

Ist insbesondere nur Innendruck $\sigma_{r_i} = -p$, so folgt aus (21a, b) mit $\sigma_{r_a} = 0$

$$\sigma_\varphi^r = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 \mp \frac{r_a^2}{r^2} \right). \quad (22a, b)^9$$

⁹ Man vgl. etwa A. Föppl: Technische Mechanik, Bd. III, 14. Aufl., S. 335, Gl. (219).

III. Graphische und numerische Durchführung des Verfahrens.

a) Voll- und Kreisringscheiben gleicher Dicke.

Man zeichnet statt des Donathschen Kurvenblattes nun nur die zwei gleichseitigen Hyperbeln in (16a, b) auf, welche die Ordinatenachse bzw. Abszissenachse zu Asymptoten haben. Die Hyperbel in $S(w)$ erscheint auf der unteren, die in $D(w)$ auf der oberen Hälfte des Blattes. Die Funktion $S(w)$ erhält man nach (16a), wenn man zur Hyperbel $S_1(w)$ des ersten Termes daselbst die Konstante K_1 addiert, mit anderen Worten, $S(w)$ ist gleich der algebraischen Summe der zum selben w -Werte gehörigen Ordinate der genannten Kurven. Analog ist die Funktion $D(w)$ nach (16b) als algebraische Summe der Ordinaten der Punkte der Ursprungsgeraden $\bar{K}_2 w$ und der Hyperbelpunkte $D_1(w)$ gleicher Abszissen zu finden. Die entsprechenden Funktionen für die ruhende Scheibe werden nach (17a, b) einfach durch die Ordinaten von Abszissenparallelen bzw. Ursprungsgeraden dargestellt. Wegen des großen Variabilitätsbereiches der unabhängigen Veränderlichen w empfiehlt es sich unter Umständen, für mehrere Teilbereiche von w verschiedene Maßstabskonstanten einzuführen. Dasselbe gilt für die Ordinaten der oben erwähnten Hyperbeln. Ein Sprung ΔS bzw. ΔD an der Grenze zweier Ringscheiben bedingt nach (16a, b) bzw. (17a, b) einfach eine Parallelverschiebung der Abszissenparallelen oder eine Neigungsänderung der Ursprungsgeraden.

Maßstäbe. Bei der Wahl der Maßstäbe empfiehlt es sich, eine drei- bzw. nur zweifache Unterteilung des w -Maßstabes je nach der Größe des Millimeterpapiers, auf welchem man die graphische Berechnung durchführt, vorzunehmen.

Für hochkantig gestelltes DIN A 4-Format wählt man zweckmäßig die folgenden drei Maßstäbe:

1. 1 cm d. Z. $\propto 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$; das zugehörige Intervall von u ist etwa $500 \text{ m/s} \geq u \geq 70 \text{ m/s}$,

2. 1 cm d. Z. $\propto 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$; das zugehörige Intervall von u ist etwa $100 \text{ m/s} \geq u \geq 22 \text{ m/s}$,

3. 1 cm d. Z. $\propto 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$; das zugehörige Intervall von u ist etwa $30 \text{ m/s} \geq u \geq 7 \text{ m/s}^{10}$.

Für die Formate DIN A 3 und DIN A 2 kommt man mit den ersten beiden Maßstäben für w aus. Die Intervalle sind dann etwa von $500 \text{ m/s} \geq u \geq 50 \text{ m/s}$, $100 \text{ m/s} \geq u \geq 15 \text{ m/s}$.

Für die Hyperbelfunktionen $S_1(w)$ und $D_1(w)$ in Abb. 2 empfiehlt sich eine abgesetzte Darstellung einerseits, um für kleine w -Werte links noch größere Funktionswerte erfassen zu können, andererseits, um für größere w -Werte rechts genauere Ablesungen zu ermöglichen.

In der Abb. 2 sind deshalb neben den mit $-S_1$ bzw. D_1 bezeichneten Hyperbeln, auf die sich die an der Ordinatenachse angeschriebenen, zu den 3 w -Maßstäben gehörigen Spannungsmaßstäbe beziehen, noch zwei weitere mit $-10 S_1$ bzw. $10 D_1$ — bezeichnete Hyperbeln gezeichnet worden, deren Ordinaten gegenüber den $-S_1$ bzw. D_1 — Hyperbeln zehnmals vergrößert sind, also in den bezüglichen w -Bereichen eine zehnfache Ablesegenauigkeit verbürgen. Das bedingt dann freilich, daß für diese Ablesungen die angegebenen Spannungsmaßstäbe durch 10 zu teilen sind.

¹⁰ Den Teilmaßstab 3 wird man wahrscheinlich nur in den seltensten Fällen benötigen.

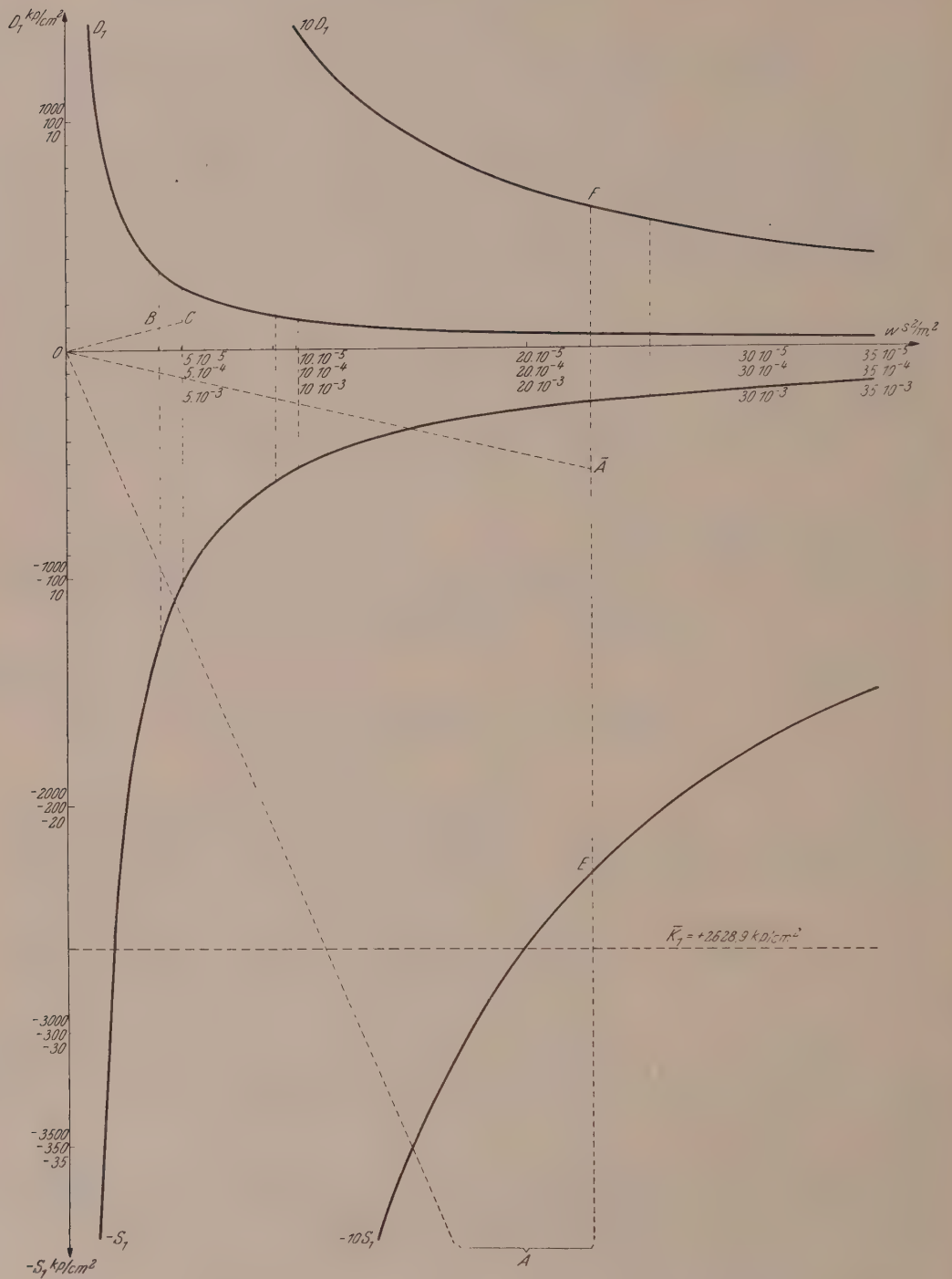


Abb. 2. Zur praktischen Ermittlung der Scheibenspannungen. Das Kurvenblatt zur Spannungsermittlung beliebig profilierter Scheiben besteht nur aus den voll ausgezogenen $-S_1$ - bzw. D_1 -Hyperbeln.

Es bedeuten also — ausführlich angeschrieben — für die drei empfohlenen w -Maßstäbe entsprechend Abb. 2:

1. 1 cm d. Z. = 100 kp/cm ²	1 cm d. Z. = 10 kp/cm ²
2. 1 „ „ „ = 10 „	1 „ „ „ = 1 „
3. 1 „ „ „ = 1 „	1 „ „ „ = 0.1 „
für die — S_1 bzw. D_1 Hyperbel.	für die — 10 S_1 bzw. 10 D_1 Hyperbel.

Es könnten beide Hyperbeln auch oberhalb der Abszissenachse allein dargestellt werden, wodurch man links noch vorteilhafterweise einen weiteren Bereich der hohen Funktionswerte von S_1 und D_1 mit erfassen könnte. Da aber diese Hyperbelteile bei gewissen w -Werten mit den zugehörigen Ordinaten ohnehin nur sehr schleifende Schnitte ergeben würden, so wäre dieser Vorteil fragwürdig. Da nach (16a) $S_1(w) < 0$ und nach (16b) $D_1(w) > 0$ ist, so wurde die S_1 -Hyperbel unterhalb, die D_1 -Hyperbel aber oberhalb der Abszissenachse aufgetragen. Die erwähnten Funktionswerte aus den Bereichen mit schleifenden Schnitten wird man dann durch Änderung des w -Maßstabes genauer bestimmen.

Beispiele.

α) Vollscheibe gleicher Dicke. Gegeben sind: $r = 50$ cm, $n = 3000$ U/Min., $\omega = 314.16$ s⁻¹, $\sigma_{ra} = 500$ kp/cm², $\nu = 0.3$, $\gamma = 7.85 \cdot 10^3$ kp/m³, $\frac{\gamma}{g} = 800.2$ kp s²/m⁴, $u_a = 157.08$ m/s, $u_a^2 = 24674$ m²/s², $w_a = \frac{1}{u_a^2} = 4.052849 \cdot 10^{-5}$ s²/m². Damit liefert (19a) $K_1 = 2628.8911$ kp/cm². Bei dem für S , D empfohlenen Maßstab ergibt sich eine x -Parallele in der Höhe von 262.9 mm. Die strengen Lösungen sind durch (2) und (3) mit $b_2 = 0$ gegeben. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 1314.445 - 0.325778 r^2, \\ \sigma_\varphi &= 1314.445 - 0.187569 r^2 \end{aligned} \right\} \text{ in } \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}. \quad (\text{a})$$

Die Diagramme sind also quadratische Parabeln mit der Ordinatenachse als gemeinsamer Parabelachse.

Bei der Ablesung ist für w zuerst der zweite Maßstab zugrunde zu legen. Für $r = 10$ cm ist dann w durch eine Strecke von 101.32 mm dargestellt. Man findet hierfür $S_1 = -51.6$ mm, es bedeutet somit $S_1 = -51.6$ kp/cm², somit ist nach (16a) $S = +S_1 + \bar{K}_1 = -51.6 + 2628.9 = 2577.3$ kp/cm². Dieser Wert ist in der 1. Spalte der Tab. 1 eingetragen. Ferner findet man $D_1 = 13.7$ mm = 13.7 kp/cm² (Spalte 2). Man findet nun nach (18a, b) $\sigma_r = 1281.8$ kp/cm², $\sigma_\varphi = 1295.5$ kp/cm². Diese Werte sind in den Spalten 6 und 8 eingetragen. Ihr Vergleich mit den in den Spalten 7 und 9 eingetragenen und nach den Gl. (a) berechneten strengen Werten ist ausgezeichnet. Schon für $r = 20$ cm, also $u = 62.8$ m/s ist der erste Maßstab zu benutzen, so daß sich jetzt w in einer Strecke von 253.5 mm darstellt. Man mißt hierfür auf der — S_1 -Hyperbel: $S_1 = -2.05$ mm = — 205 kp/cm², somit ist $S = -205 + 2629 = 2423$ kp/cm². Ferner mißt man auf der 10 D_1 -Hyperbel: $D_1 = 55$ mm \approx 55 kp/cm² usw. Da $\bar{K}_1 > 0$, $S_1(w) < 0$ in (16a) sind, so ist — am besten durch Ziehen der \bar{K}_1 entsprechenden x -Parallelen in der unteren Halbebene — die Differenz der bezüglichen Ordinaten zu bilden und positiv zu nehmen, solange $|\bar{K}_1| > |S_1|$. Die Ablesung der S - und D -Werte nach (16a, b) und die Berechnung der Spannungen σ_r und σ_φ nach (18a, b) kann sehr rasch nach Tab. 1 erfolgen.

Tabelle 1.
Zum Beispiel α : Vollscheibe gleicher Dicke.

r cm	Aus der Zeichnung		Gerechnet						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S kp/cm ²	D kp/cm ²	u m/s	u^2 m ² /s ²	$w \cdot 10^5$ s ² /m ²	σ_r kp/cm ²	σ_r streng kp/cm ²	σ_φ kp/cm ²	σ_φ streng kp/cm ²
0	2629	0	0	0	∞	1315	1314.4	1315	1314.4
10	2577.3	13.7	31.416	986.960	101.32	1281.8	1281.8	1295.5	1295.6
20	2423	55	62.832	3947.842	25.35	1184	1184.1	1239	1239.4
30	2164	123	94.248	8882.644	11.25	1020.5	1021.2	1143.5	1145.6
40	1814	220	125.664	15791.367	6.34	797	793.2	1017	1014.3
50	1342	346	157.080	24674.011	4.053	498	500	844	845.5

$10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$

$10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$

Tabelle 2.

Zum Beispiel β : Kreisringscheibe gleicher Dicke.

r cm			3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	u m/s	u^2 m ² /s ²	$w \cdot 10^5$ s ² /m ²	σ_r kp/cm ²	σ_r streng kp/cm ²	σ_φ kp/cm ²	σ_φ streng kp/cm ²	Maßstab
	S kp/cm ²	D kp/cm ²								
10	1739.63	2139.62	10.47197	109.6623	911.8900	— 200.00	— 200.00	1939.62	1939.63	$10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}^2$
20	1722.49	540.62	20.94394	438.6492	227.9700	+ 590.93	+ 590.93	1131.54	1131.59	$10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$
30	1693.84	251.16	31.41591	986.9607	101.3200	721.34	721.31	972.49	972.69	
40	1653.84	157.80	41.88788	1754.5968	56.9931	748.01	747.93	905.81	906.14	
50	1603.04	124.22	52.35985	2741.5575	36.4756	739.40	739.41	863.62	863.33	
60	1540.14	114.50	62.83182	3947.8428	25.3303	712.81	712.66	827.31	827.33	
70	1465.84	119.30	73.30379	5373.4527	18.6100	673.26	673.48	792.56	792.36	$10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$
80	1379.84	132.80	83.77576	7018.3872	14.2483	623.52	624.30	756.32	755.99	
90	1278.44	152.40	94.24773	8882.6463	11.2579	563.02	566.27	715.42	717.05	
100	1173.34	174.00	104.71970	10966.2300	9.1189	499.62	500.00	673.67	674.95	

β) Kreisringscheibe gleicher Dicke¹¹. Gegeben sind: $r_i = 10$ cm, $r_a = 100$ cm, $n = 1000$ U/Min., $\omega = 104 \cdot 719753$ s⁻¹, $\sigma_{r_i} = -200$ kp/cm², $\sigma_{r_a} = 500$ kp/cm², $\nu = 0.3$, $\gamma = 7.85 \cdot 10^3$ kp/m³, $u_i = 10.472$ m/s, $u_a = 104.72$ m/s. Daher folgt aus (20a, b) $\bar{K}_1 = 1745.336$ kp/cm², $\bar{K}_2 = 2344.685460$ kp/s², $\bar{K}_2 w_i = 2138.09$ kp/cm².

Hier muß zunächst der dritte Maßstab benutzt werden, damit für $r_i = 10$ cm, $w_i = 9.119 \cdot 10^{-3}$ s²/m² erreichbar wird. Es gilt dann der Ordinatenmaßstab 3., also 1 cm = 1 kp/cm². Damit findet man

$$S_1 = -5.71 \text{ kp/cm}^2, \text{ also } S = 1745.34 - 5.71 = 1739.63 \text{ kp/cm}^2, \\ D_1 = 1.53 \text{ kp/cm}^2, \text{ also } D = 2138.09 + 1.53 = 2139.62 \text{ kp/cm}^2$$

in den Spalten 1 und 2 der Tab. 2 und nach Gl. (18a, b): $\sigma_r = -200$ kp/cm², $\sigma_\varphi = 1939.62$ kp/cm² in den Spalten 6 und 8. Für $r = 20$ cm, also $w = 22.797 \cdot 10^{-4}$ s²/m² muß der zweite Maßstab, das ist 1 cm = 10 kp/cm² verwendet werden.

Man findet auf der -10 S_1 -Hyperbel zu $w = 22.797 \cdot 10^{-4}$ s²/m² den Punkt E mit der Ordinate -228.5 mm, somit $S_1 = -\frac{228.5}{10} = -22.85$ kp/cm², also $S = -22.85 + 1745.34 = 1722.49$ kp/cm². Ferner ergibt sich mit dem obigen K_2 -Wert $\bar{K}_2 w = 534.52$ kp/cm² und dem angegebenen Maßstab zunächst Punkt A mit der Ordinate 53.45 cm und damit die Ursprungsgerade OA , die in Abb. 2 bloß wegen des größeren Zeichenraumes in der unteren Hälfte aufgetragen worden ist. Für die nicht erreichbaren Punkte dieser Geraden ist als Ersatz die Gerade $O\bar{A}$ mit zehnmal kleineren Ordinaten gezeichnet worden. Zum Wert $w = 22.797 \cdot 10^{-4}$ s²/m² liest man ferner auf der 10 D_1 -Hyperbel den Punkt F mit der Ordinate 61 mm ab, der also 6.1 kp/cm² entsprechen. Somit ist $D = 6.1 + 534.52 = 540.62$ kp/cm² usw. Schließlich sind in den Spalten 7 und 9 noch die strengen Spannungswerte angeführt worden, die nach den bekannten Gleichungen [Biezeno-Grammel, a. a. O., S. 6, Gl. (5) bis (7)] berechnet wurden.

$$\sigma_r = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \alpha \omega^2 r^2; \quad A_1 = \frac{\sigma_{r_a} r_a^2 - \sigma_{r_i} r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \alpha \omega^2 (r_a^2 + r_i^2); \quad \alpha = \frac{3m+1}{8m} \frac{\gamma}{g}; \\ \sigma_\varphi = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \beta \omega^2 r^2; \quad A_2 = -(\sigma_{r_a} - \sigma_{r_i}) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \alpha \omega^2 r_a^2 r_i^2; \quad \beta = \frac{m+3}{8m} \frac{\gamma}{g}.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten und Maßeinheiten ist hier:

$$A_1 = 8.726665 \cdot 10^2 \text{ kp/cm}^2, \quad A_2 = -1069.0468 \cdot 10^2 \text{ kp}.$$

Die Übereinstimmung mit den Spannungswerten der Spalten 6 und 8 ist vorzüglich.

b) Die Scheibe beliebigen Profils.

Diese wird wie bei den Verfahren von Grammel und Donath durch ein Stufenprofil von Kreisringscheiben angenähert. Ist r_i der Halbmesser, welcher zur Trennungsstelle zweier Kreisringscheiben verschiedener Dicke gehört und w_i der nach (15) zugeordnete Wert der unabhängig Veränderlichen w , so mögen S_i und D_i Randwerte der durch die Gl. (16a, b) eingeführten Funktionen S und D bedeuten. Schreitet man etwa bei der Spannungsermittlung von außen nach innen fort, so sind S_i und D_i also die dem inneren Rande der äußeren Kreisringscheibe für $w = w_i$ entsprechenden Werte von S und D . Dann bedeuten gemäß (10a, b) $S_i' = S_i - \Delta S_i$ und $D_i' = D_i - \Delta D_i$ die Werte derselben Funktionen für den Außenrand der inneren Kreisringscheibe, die als Anfangswerte für deren Berechnung zugrunde zu legen sind. Die

¹¹ Siehe C. B. Biezeno-Grammel², S. 6.

Werte der Funktionen S und D für den Innenrand der inneren Kreistringscheibe mögen dann sinngemäß mit S_{i+1} bzw. D_{i+1} bezeichnet werden. Dann folgt gemäß (16a, b)

$$S'_i = -\frac{1+\nu}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_i} + \bar{K}_1 = S_{1,i} + \bar{K}_1$$

und

$$S_{i+1} = -\frac{1+\nu}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_{i+1}} + \bar{K}_1 = S_{1,i+1} + \bar{K}_1,$$

woraus sich

$$S_{i+1} = S'_i - (S_{1,i} - S_{1,i+1}) = S'_i + \delta S_i \quad (23)$$

mit

$$\delta S_i = \frac{1+\nu}{2} \frac{\gamma}{g} \left(\frac{1}{w_i} - \frac{1}{w_{i+1}} \right) \quad (23a)$$

ergibt. Analog ist

$$D'_i = \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_i} + \bar{K}_2 w_i = D_{1,i} + \bar{K}_2 w_i$$

und

$$D_{i+1} = \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_{i+1}} + \bar{K}_2 w_{i+1} = D_{1,i+1} + \bar{K}_2 w_{i+1}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\bar{K}_2 = \frac{D'_i - D_{1,i}}{w_i}$$

und durch Subtraktion

$$D'_i - D_{i+1} = D_{1,i} - D_{1,i+1} + \bar{K}_2 (w_i - w_{i+1}).$$

Setzt man hierin den Wert für \bar{K}_2 ein, so erhält man

$$D_{i+1} = D'_i - (D_{1,i} - D_{1,i+1}) - \bar{K}_2 (w_i - w_{i+1}) = D'_i + \delta D_i \quad (24)$$

mit

$$\delta D_i = - (D_{1,i} - D_{1,i+1}) - (D'_i - D_{1,i}) \frac{w_i - w_{i+1}}{w_i}. \quad (24a)$$

Hierin kann man für D_1 nach (16b) auch die zugehörige Hyperbelfunktion einsetzen und hat dann statt (24a) ausführlicher

$$\delta D_i = -\frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \left(\frac{1}{w_i} - \frac{1}{w_{i+1}} \right) - \left(D'_i - \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_i} \right) \frac{w_i - w_{i+1}}{w_i}. \quad (24b)$$

Oft empfiehlt es sich — auch wegen einer etwas vereinfachten Darstellung — (24) etwas umzuformen, wodurch man erhält

$$D_{i+1} = D_{1,i+1} + (D'_i - D_{1,i}) \frac{w_{i+1}}{w_i}. \quad (25)$$

Ausführlicher geschrieben ergibt sich aus (25)

$$D_{i+1} = \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_{i+1}} + \left(D'_i - \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma}{g} \frac{1}{w_i} \right) \frac{w_{i+1}}{w_i}. \quad (25a)$$

Es möge noch besonders betont werden, daß die Änderungen δS , δD der Funktionen S , D innerhalb einer Kreistringscheibe gleicher Dicke, wie sie in den Gl. (23) und (24) auftreten, wohl zu unterscheiden sind von den Änderungen ΔS , ΔD derselben Funktionen an der Grenze zweier Kreistringscheiben, wie sie in den Gl. (10) und (11) verwendet wurden. Die Gl. (23) bis (25) dienen insbesondere zur numerischen Durchführung des Verfahrens. Aber auch bei der hauptsächlich graphischen Erledigung wird man die durch die Gl. (9a, b), (10a, b), (11) und (12) geforderten Zusammenhänge am raschesten rechnerisch erledigen und in einem zugleich mit der Zeichnung zu entwickelnden Protokoll in Form einer Tabelle festhalten und weiter verwerten.

Beispiel.

Hierzu wurde die in Abb. 3 dargestellte Scheibe benützt, die Grammel² behandelt und auch als Musterbeispiel in den dem erwähnten Werke beigelegten Rechenformularen zur Darstellung bringt. Gegeben sind: $r_i = 10$ cm, $r_a = 50$ cm, $n = 3000$ U/Min., $\omega = 314 \cdot 16$ s⁻¹, $\sigma_{r_i} = -75$ kp/cm², $\sigma_{r_a} = 200$ kp/cm², $\nu = 0.3$, $\gamma = 7.85 \cdot 10^3$ kp/m³. Die Radien der Sprünge der treppenförmigen Näherung an die Profilkurve sind, wie auch aus der beigelegten Tab. 3 hervorgeht, von außen nach innen 45, 40,

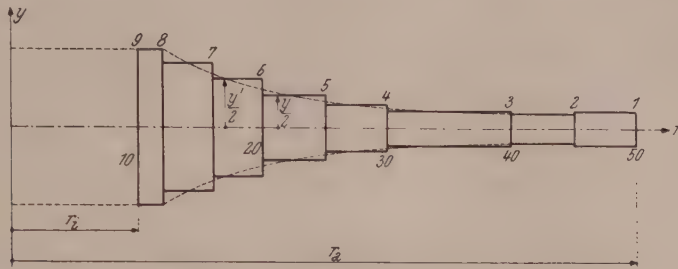


Abb. 3. Zerlegung einer Scheibe beliebigen Profils in kreisringförmige Teilscheiben von je gleicher Dicke y .

30, 25, 20, 16, 12, 10 cm. Man kann bei einem ersten Rechnungsgange nur eine der beiden Randbedingungen für σ_r erfüllen, etwa $\sigma_{r_a} = 200$ kp/cm², falls man die Berechnung von außen beginnt. Da man aber die hierbei benötigte Tangentialspannung σ_{φ_a} nicht kennt, so ist man genötigt, hierfür zunächst einen willkürlichen Wert anzunehmen, für den mit Grammel $\sigma_{\varphi_a} = 500$ kp/cm² gewählt werden soll.

Die Tab. 3 enthält in den Spalten 1, 2, 3 die Werte r , u , w an den Grenzen der Kreisringscheiben, also an den Stellen der Sprünge der Treppenkurve. Spalte 4 enthält die Dicken y der Kreisringscheiben, die daher zwischen die zugehörigen Grenzwerte der vorhergehenden Größen r , u , w geschrieben sind, so daß die Spalte 4 gegen die anderen Spalten um eine halbe Zeile tiefer gerückt erscheint¹². Spalte 5 gibt den in den Gl. (9a, b) benötigten Funktionswert $1 - \frac{y}{y'}$ an den Scheibengrenzen an.

Nach (18a, b) sind ferner die Anfangswerte S und D aus den gewählten Werten σ_{φ_a} und σ_{r_a} bestimmt zu $S = 700$ kp/cm², $D = 300$ kp/cm². Die Spannungswerte σ sind in den Spalten 6 und 7 eingetragen, während Spalte 8 die nach Gl. (9a) zu berechnenden Werte $\Delta\sigma_r$ enthält, wobei wegen fehlender Randbelastung $z = 0$ zu setzen ist.

Die Spalten 9 und 12 enthalten dann die aus $\Delta\sigma_r$ nach (10a, b) berechneten Sprungwerte ΔS und ΔD , während die Spalten 10 und 13 die durch die Zeichnung aus S' in Spalte 11 bzw. D' in Spalte 14 zu gewinnenden neuen Werte S bzw. D enthalten. Die zeichnerische Operation ist durch die schrägen Pfeile angedeutet.

Die Spalten 15 und 16 enthalten die Werte der Spannungen σ_{φ} und σ_r , wie sie durch das Verfahren von Grammel² erhalten wurden. Bis auf die letzte Zeile ($r = 10$ cm) ist die Übereinstimmung befriedigend.

Verfolgt man die schrägen Pfeile, so erhält man z. B. aus $S'_i = 700$ kp/cm² für $w_i = 0.405 \cdot 10^{-4}$ s²/m² den neuen zu $w_{i+1} = 0.503 \cdot 10^{-4}$ s²/m² gehörigen Wert von

¹² Bei Grammel² und Donath bedeutet y ebenfalls die ganze Scheibendicke, wie auch in Abb. 3. Man vgl. etwa J. Malkin: Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, S. 21. Berlin. 1935. Dort ist jedoch die halbe Scheibendicke mit z bezeichnet. Man vgl. Abb. 4, S. 19 der Schrift von Malkin.

S_{i+1} nach (23) einfach durch Ablesen der Differenz der Funktionswerte der Hyperbel S_1 . Man liest ab $S_{1,i}$ ($w_i = 0.405 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2 = 4.05 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$; hierbei ist Maßstab 1 benutzt) $= -1300 \text{ kp/cm}^2$, $S_{1,i+1}$ ($w_{i+1} = 0.503 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$) $= -1040 \text{ kp/cm}^2$; also ist $S_{i+1} = 700 - (-1300 + 1040) = 960 \text{ kp/cm}^2$. Ebenso liest man ab $D_{1,i}$ ($w_i = 0.405 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$) $= 346 \text{ kp/cm}^2$, $D_{1,i+1}$ ($w_{i+1} = 0.503 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$) $= 278 \text{ kp/cm}^2$; also ist nach (25) $D_{i+1} = 278 + (300 - 346) \cdot \frac{503}{405} = 213 \text{ kp/cm}^2$.

Tabelle 3.

Beispiel: Rotierende und ruhende Scheibe vorgegebenen Profils nach Abb. 3.

1	2	3	4	5	6	7	8
r cm	u m/s	$w \cdot 10^4$ s^2/m^2	y cm	$1 - \frac{y}{y'}$	σ_φ kp/cm ²	σ_r kp/cm ²	$\Delta \sigma_r$ kp/cm ²
Scheibe in Drehung							
50	157	0.405	4.00	—	500	200	—
45	141	0.503	2.10	-0.428	586	374	-160
40	126	0.629	2.90	$+0.276$	696	686	$+189$
30	94	1.131	4.00	$+0.275$	745	758	208
25	79	1.603	5.75	$+0.305$	735	633	193
20	63	2.703	8.00	$+0.281$	779	473	133
16	50	4.000	10.80	$+0.259$	847	292	76
12	38	6.944	13.30	$+0.189$	1061	34	6
10	31	10.472		—	1315	-202	—

1	9	10	11	12	13	14	15	16
r cm	ΔS_i kp/cm ²	S_i kp/cm ²	$S_i' = S_i - \Delta S_i$ kp/cm ²	ΔD_i kp/cm ²	D_i kp/cm ²	$D_i' = D_i - \Delta D_i$ kp/cm ²	σ_φ kp/cm ²	σ_r kp/cm ²
Scheibe in Drehung								
50	—	700	700	—	300	300	500	200
45	-208	960	1168	$+112$	213	101	584	360
40	$+245$	1383	1138	-132	10	142	688	675
30	270	1503	1233	-146	-13	133	733	749
25	251	1368	1117	-135	102	237	724	632
20	173	1252	1079	-93	307	400	747	473
16	99	1139	1040	-53	555	608	821	300
12	8	1095	1087	-4	1026	1030	1029	49
10	—	1113	—	—	1518	—	1246	-158

1	17	18	19	20	21	22	23
r cm	$D_{1,i}$ kp/cm ²	$D_{1,i}' - D_{1,i}$ kp/cm ²	$(D_{1,i}' - D_{1,i}) \cdot \frac{w_{i+1}}{w_i}$ kp/cm ²	D_{i+1} kp/cm ²	$S_{1,i}$ kp/cm ²	$S_{1,i} - S_{1,i+1}$ kp/cm ²	S_{i+1} kp/cm ²
Scheibe in Drehung							
50	346	-46	-57	300	-1283	—	700
45	278	-177	-221	221	-1033	-250	950
40	222	-80	-144	1	-827	-206	1374
30	124	$+9$	$+13$	-20	-459	-368	1506
25	88	$+149$	$+252$	$+101$	-324	-135	1368
20	52	348	$+529$	304	-192	-132	1249
16	28	580	$+1007$	557	-130	-62	1141
12	20	1010	$+1520$	1027	-75	-55	1095
10	13	—	—	1533	-50	-25	1112

1	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
r cm	σ_{φ}^0 kp/cm ²	σ_r^0 kp/cm ²	$\Delta \sigma_r$ kp/cm ²	ΔS_i kp/cm ²	S_i kp/cm ²	$S_i' = S_i - \Delta S_i$ kp/cm ²	ΔD_i kp/cm ²	D_i kp/cm ²	$D_i' = D_i - \Delta D_i$ kp/cm ²	σ_{φ}^0 kp/cm ²	σ_r^0 kp/cm ²
	Scheibe in Ruhe										nach Grammel
50	100	0	—	—	100	100	—	100	100	100	0
45	112	— 12	+ 5.1	+ 7	100	93	— 4	124	128	112	— 12
40	127	— 34	— 9.4	— 12.2	93	105	+ 6.6	160	153	127	— 34
30	191	— 86	— 24	— 31	105	136	+ 17	277	260	190	— 85
25	253	— 117	— 36	— 47	136	183	25	369	344	254	— 119
20	381	— 198	— 56	— 73	183	256	39	580	541	363	— 181
16	528	— 272	— 70	— 91	256	347	49	799	750	521	— 273
12	824	— 477	— 90	— 117	347	464	63	1301	1238	832	— 492
10	1158	— 694	—	—	464	—	—	1853	—	1137	— 676

Die hier zeichnerisch erledigten, durch die Gl. (23) und (25) vorgeschriebenen Operationen können natürlich auch rein rechnerisch durchgeführt werden, wozu man noch einige Spalten benötigt, die an die Spalte 16 anschließen. Die Spalte 17 gibt die nach (16b) errechneten Hyperbelwerte $D_{1,i}$, Spalte 18 die in Gl. (25) erforderliche Differenz $D_i' - D_{1,i}$, wobei die Werte D_i' schrittweise nach Spalte 14 aus den bereits aus den Spalten 17 bis 20, wie unten angegeben, berechneten Werten für D_i entnommen werden müssen. Spalte 19 gibt die Werte $(D_i' - D_{1,i}) \frac{w_{i+1}}{w_i}$ wieder. In Spalte 20 ist schließlich die Summe der Spaltenwerte von 17 und 19 angegeben, wobei jedoch gemäß (25) die Summierung im Sinne der linken strichlierten Doppelpfeile zu erfolgen hat, während das Ergebnis, wie es die rechten strichlierten Pfeile angeben, einzutragen ist; z. B. $278 - 57 = 221$. Die Spalte 21 ergibt die nach (23) zu ermittelnden Hyperbelwerte $S_{1,i}$ an, während ihre Differenz in Spalte 22 zwischen die Zeilen der zu subtrahierenden Werte eingetragen ist. In Spalte 23 sind schließlich die nach Gl. (23) berechneten Werte S_{i+1} aus der nächst tieferen Zeile ersichtlich. Z. B. $950 = 700 - (-250)$; $1374 = 1168 - (-206)$, wobei die Werte 700, 1168... der Spalte 11 entnommen wurden.

Die Ergebnisse der Spalten 13 und 20 und ebenso die der Spalten 10 und 23 müssen ungefähr miteinander übereinstimmen. Das ist bezüglich der Spalten 13 und 20 in geringerem Maße der Fall, doch wurde von einer Neuberechnung von σ_{φ} , σ_r und damit $\Delta \sigma_r$, ΔS , ΔD Abstand genommen, da die Korrekturen klein geblieben wären.

Um nun auch der zweiten Randbedingung $\sigma_{r_i} = -75 \text{ kp/cm}^2$ zu genügen, berechnen wir mit Grammel einen Ruhespannungszustand der Scheibe, dessen Radialaußenspannung $\sigma_{r_a} = 0$ sein muß, da nur dann die mit einer Konstanten κ multiplizierten Spannungen σ_{φ} , σ_r des Ruhespannungszustandes, sofern man sie den Spannungen des eben ermittelten Bewegungsspannungszustandes überlagert, es gestatten, der bereits erfüllten Randbedingung σ_{r_a} für $r = r_a$ weiterhin zu genügen. Für σ_{φ_a} werden mit Grammel willkürlich $\sigma_{\varphi_a}^0 = 100 \text{ kp/cm}^2$ gewählt. Die Überlagerungskonstante κ wird nun so bestimmt, daß σ_{r_i} für $r = r_i$ erhalten wird. Ist allgemein $\sigma_{r_i}^{\omega}$ die Radialinnenspannung des Bewegungsspannungszustandes und $\sigma_{r_i}^0$ die des Ruhespannungszustandes, so muß also $\sigma_{r_i} = \sigma_{r_i}^{\omega} + \kappa \sigma_{r_i}^0$ sein. Dies bedingt die Lösung¹³

$$\kappa = \frac{\sigma_{r_i} - \sigma_{r_i}^{\omega}}{\sigma_{r_i}^0}. \quad (26)$$

¹³ Man vgl. Gl. (10), S. 15, a. a. O.².

Nur für den Ruhespannungszustand gilt gemäß (21a, b) die Feststellung, daß die Erweiterung der Randspannung σ_{r_a} , σ_{r_i} mit derselben Konstanten κ auch eine Erweiterung der Spannungen σ_φ , σ_r längs ihres ganzen Verlaufes um dieselbe Konstante κ bedingt¹⁴. Daß diese Superposition nach dem Verfahren von Donath nicht ohne weiteres möglich ist, wurde schon eingangs erwähnt¹⁵.

In der vorliegenden Weiterführung des Donathschen Verfahrens gestaltet sich nun die Ermittlung des Ruhespannungszustandes außerordentlich einfach und läßt sich gemäß (17a, b) zeichnerisch durch wenige Ursprungsgeraden erledigen.

Wegen $\sigma_{r_a}^0 = 0$ und $\sigma_{\varphi_a}^0 = 100 \text{ kp/cm}^2$ ist nach (18a, b) $S = D = 100 \text{ kp/cm}^2$ für $r = r_a = 50 \text{ cm}$. Wegen (17a) bleibt $S = K_1^0 = S'$, so daß also längs der Pfeile die von Spalte 29 zur Spalte 28 weisen, keine Änderung eintritt. Hingegen ändern sich die D' -Werte der Spalte 32 durch die gemäß (17b) angezeigte Beziehung linear mit w zu den Werten D der Spalte 31 ab, was natürlich wieder zeichnerisch und rechnerisch durchgeführt werden kann. Für $w_i = 0.405 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2 = 4.05 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$ muß $D_i = 100 \text{ kp/cm}^2$ sein, somit muß nach Maßstab 1 der Punkt B die Abszisse 4.05 cm und Ordinate 1 cm erhalten. Die Ursprungsgerade OB wird von der Ordinate mit der Abszisse 5.03 cm im Punkte C getroffen, dessen Ordinate die Zeichnung mit 1.24 cm ergibt, dem $D_{i+1} = 124 \text{ kp/cm}^2$ entspricht. Im Schaubild 2 sind die Ursprungsgeraden, die zum Bewegungsspannungszustand gehören, strichliert, diejenigen, die zum Ruhespannungszustand gehören, strichpunktiert eingezeichnet.

Die Spalten 24 und 25 enthalten die ermittelten Werte von σ_φ^0 und σ_r^0 , 26 und 27 enthalten die nach den Gl. (9a) mit $z = 0$ und (10a) zu ermittelnden Werte von $\Delta\sigma_r$ und ΔS , während die Spalte 28 die Werte S und 29 die Werte $S' = S - \Delta S$ enthält. Spalte 30 bringt dann die nach (10b) ermittelten Werte ΔD , Spalten 31 und 32 enthalten analog D und $D' = D - \Delta D$. Die Spalten 33 und 34 endlich bringen die Grammelschen Vergleichswerte für σ_φ^0 und σ_r^0 , die mit den hier ermittelten sehr gut übereinstimmen.

Bei jedem Ersatz der Zeichnung durch die Rechnung wurde diese mit einem 25-cm-Rechenschieber erledigt.

Es ergab sich neben dem geforderten Wert $\sigma_{r_i} = -75 \text{ kp/cm}^2$ der Radialspannung an der Bohrungswandung im Falle der Bewegung $\sigma_{r_i}^w = -202 \text{ kp/cm}^2$, $\sigma_r^0 = -694 \text{ kp/cm}^2$. Daß der erstere Wert relativ ziemlich stark vom Grammelschen Wert $\sigma_{r_i}^w = -158 \text{ kp/cm}^2$ abweicht, hat seinen Grund in dem unmittelbar vorher stattfindenden Vorzeichenwechsel von σ_r und weist darauf hin, daß die gewählte Treppenkurve als Annäherung an das gegebene Profil in der Nähe der Nabe eigentlich noch verfeinert werden müßte. Trotz dem sich hier nach Gl. (26) ergebenden Wert $\kappa = \frac{-75 + 202}{-694} = -0.183$, der vom Grammelschen Wert ziemlich stark abweicht, wird das Übereinanderlagerungsergebnis wegen der absolut für die meisten r -Werte viel kleineren Werte des Ruhespannungszustandes, die eben noch mit den kleinen κ -Werten multipliziert werden müssen, nur wenig beeinflusst.

In der Tab. 4 sind in den Spalten 2 und 3 an den Sprungstellen nach dem Vorgange von Grammel² die Mittelwerte $\sigma_{\varphi_m} = \sigma_\varphi - \frac{1}{2} \Delta\sigma_\varphi$ und $\sigma_{r_m} = \sigma_r - \frac{1}{2} \Delta\sigma_r$

¹⁴ Man vgl. a. a. O.², S. 6, die dortigen Gl. (7) für die Integrationskonstanten, die neben Gliedern mit σ_{r_i} , σ_{r_a} noch solche mit ω^2 enthalten. Dasselbe Ergebnis liefern auch unsere Gl. (1) und (2) für die Integrationskonstanten b_1 und b_2 .

¹⁵ Diese Lücke des Donathschen Verfahrens betont auch J. Malkin, a. a. O.⁴, S. 38, daselbst sehr bestimmt. Dort wird auch die hier durchgeführte Vereinfachung des Donathschen Kurvenblattes hinsichtlich der Kurventransformation angedeutet. Man vgl. hiezu auch R. Grammel¹, S. 218.

der Spannungen für den Bewegungszustand und in den Spalten 4 und 5 ebenso für den Ruhestand angegeben. Die Spalten 6 und 7 geben die endgültigen Spannungswerte und die Spalten 8 und 9 die von Grammel ermittelten Vergleichswerte an. Die Übereinstimmung ist durchwegs befriedigend.

Tabelle 4. Die mit $\kappa = -0.183$ aus den Sprungmittelwerten $\sigma_{\varphi m}$ und $\sigma_{r m}$ ermittelten endgültigen Spannungswerte und die Grammelschen Vergleichswerte der Scheibe vorgegebenen Profils nach Abb. 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Bewegung		Ruhe		Endgültige Spannungswerte		Vergleichswerte nach Grammel	
	Sprungmittelwerte		Sprungmittelwerte		σ_{φ} kp/cm ²	σ_r kp/cm ²	σ_{φ} kp/cm ²	σ_r kp/cm ²
r cm	$\sigma_{\varphi m}$ kp/cm ²	$\sigma_{r m}$ kp/cm ²	σ_{φ}^0 kp/cm ²	σ_r^0 kp/cm ²	$\sigma_{\varphi m} + \kappa \sigma_{\varphi}^0$	$\sigma_{r m} + \kappa \sigma_r^0$	$\sigma_{\varphi m} + \kappa \sigma_{\varphi}^0$	$\sigma_{r m} + \kappa \sigma_r^0$
50	500	200	100	0	482	200	488	200
45	610	454	111	— 14.5	590	457	593	439
40	668	596	128	— 29	645	601	644	586
30	714	654	195	— 74	678	668	678	655
25	706	536	258	— 99	659	554	663	548
20	759	406	373	— 170	691	437	682	426
16	836	254	518	— 237	741	297	744	290
12	1060	31	811	— 432	912	110	924	100
10	1315	— 202	1158	— 694	1103	— 75	1106	— 75

(Eingegangen am 13. Mai 1955.)

Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder.

Von E. Melan, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden zunächst die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen in einer dünnen Scheibe infolge eines zeitlich veränderlichen Temperaturfeldes angegeben und dann als Beispiel die Wärmespannungen bestimmt, welche in einer unendlich ausgedehnten dünnen Scheibe entstehen, wenn in einem Punkte eine Wärmemenge plötzlich aufgebracht wird.

Summary. First the general expressions are given for the stresses in a thin disc due to a temperature field variable with time. As an example, the thermal stresses are determined which originate in a infinite thin disc when an quantity of heat is suddenly applied at one point.

Résumé. Tout d'abord, sont indiqués les termes généraux pour désigner les efforts occasionnés dans un mince disque par un champ de température variable par rapport au temps, et ensuite, à titre d'exemple, les efforts thermiques nés dans un mince disque d'une étendue infinie, lorsqu'une quantité de chaleur est soudainement appliquée sur un endroit déterminé.

Die Verteilung der Temperatur T in einer dünnen Scheibe ist durch die Differentialgleichung

$$a \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

bestimmt, worin a die Wärmeleitzahl, t die Zeit und Δ den Laplaceschen Operator bedeutet. Will man die Wärmespannungen berechnen, die durch dieses Temperaturfeld entstehen, so benützt man vorteilhaft das thermisch-elastische Verschiebungspotential, welches durch die Differentialgleichung

$$\Delta \psi = (1 + \mu) \alpha T \quad (2)$$

gegeben ist¹. μ bedeutet das Verhältnis der Quer- zur Längsdehnung, α den Wärmeausdehnungskoeffizienten.

¹ Siehe Melan-Parkus: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien. 1953.

Auf ebene Polarkoordinaten bezogen hat der Laplacesche Operator die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}$$

und die Spannungen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\sigma_{rr} = -2G \left(\frac{\partial \psi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = +2G \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad (3)$$

wenn G den Gleitmodul bedeutet.

Es genügt vorerst ein beliebiges partikulares Integral der Gl. (2) zu kennen, das sich wie folgt beschaffen läßt:

Differenziert man die Gl. (2) nach t , so erhält man nach Vertauschung der Operationsfolge linker Hand

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 + \mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Hierin der Wert von $\frac{\partial T}{\partial t}$ nach Gl. (1) eingesetzt, ergibt

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 + \mu) \alpha a \Delta T,$$

also

$$\psi = (1 + \mu) \alpha a \int T dt. \quad (4)$$

Die Spannungen, welche nunmehr nach den Gl. (3) bestimmt werden können, werden im allgemeinen nicht die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen. Dies läßt sich jedoch durch die Überlagerung einer Lösung für $T = 0$ mit entsprechenden Randwerten erreichen. Es ist dies eine Fundamentalaufgabe der Theorie der Scheiben, die mittels der Spannungsfunktion von Airy zumeist gelöst wird.

Als einfaches Beispiel sei der Spannungszustand in einer dünnen Scheibe von der Dicke δ berechnet, die sich allseitig ins Unendliche erstreckt, wenn zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung $r = 0$ die Wärmemenge W aufgebracht wird. Mit der Zeit verteilt sich W über die ganze Scheibe; wegen der unendlichen Ausdehnung der Scheibe beträgt nach unendlich langer Zeit die Temperatur wieder Null.

Die axiale Symmetrie bedingt das Verschwinden der Ableitungen nach φ und es ist also eine Lösung der Differentialgleichung (1)

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

mit nachstehenden Randbedingungen zu finden: für $r \rightarrow \infty$ ist zu jeder Zeit t $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, für $t \rightarrow 0$ ist $T = 0$ für alle r mit Ausnahme eines kleinen Bereiches um $r = 0$.

Die Lösung, die diesen Bedingungen genügt, ist bekannt². Sie lautet

$$T = M e^{-\frac{r^2}{4at}}.$$

Weil nach unendlich langer Zeit $t \rightarrow \infty$ überall die Temperatur $T = 0$ herrscht, hat sich die Wärmemenge W zur Gänze über die unendliche Scheibe verteilt, so daß durch eine Zylinderfläche $2r\pi\delta$ mit dem Radius r die gesamte Wärmemenge W geflossen sein muß. Da nach der Theorie der Wärme in der Zeit dt die Wärmemenge dW

$$dW = -2r\pi\lambda\delta \frac{\partial T}{\partial r}$$

² Siehe z. B. Frank-Mises: Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II. Bd.

durch diese Zylinderfläche austritt (λ bedeutet die Wärmeleitfähigkeit) und weil

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{M r}{4 a^2 t^2} e^{-\frac{r^2}{4 a t}},$$

wird

$$W = \frac{2 r^2 \pi \lambda \delta M}{4 a^2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4 a t}} \frac{dt}{t^2}.$$

Nun ist

$$\int e^{-\frac{1}{z}} \frac{dz}{z^2} = + e^{-\frac{1}{z}}$$

und man erhält sonach

$$W = \frac{2 \pi \lambda \delta M}{a}, \text{ also } M = \frac{W a}{2 \pi \lambda \delta}. \quad (5)$$

Das thermisch-elastische Verschiebungspotential wird demnach nach Gl. (4)

$$\psi = (1 + \mu) \alpha a M \int e^{-\frac{r^2}{4 a t}} \frac{dt}{2 a t}.$$

Die Substitution

$$t = \frac{r^2}{4 a u}$$

führt auf

$$\psi = - (1 + \mu) \alpha \frac{1}{2} M \int e^{-u} \frac{du}{u}$$

und wenn man, um zu bekannten Funktionen zu gelangen³,

$$\int_z^x e^{-u} \frac{du}{u} = F(z)$$

nennt, so wird

$$\psi = (1 + \mu) \alpha \frac{1}{2} M F\left(\frac{r^2}{4 a t}\right).$$

Zur Bestimmung der Spannungen nach Gl. (3) benötigt man die Ableitungen von ψ nach r . Definitionsgemäß ist

$$\frac{dF(\vartheta[r])}{dr} = - \frac{e^{-\vartheta(r)}}{\vartheta(r)} \frac{d\vartheta}{dr}$$

und dies ergibt in unserem Falle mit $\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{r}{2 a t}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = - (1 + \mu) \alpha \frac{M}{r} e^{-\frac{r^2}{4 a t}},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = (1 + \mu) \alpha M e^{-\frac{r^2}{4 a t}} \left(\frac{1}{2 a t} + \frac{1}{r^2} \right).$$

Mit diesen Werten finden wir die Gl. (2) bestätigt; für die Spannungen ergeben sich nach den Gl. (3) mit Verwendung des Elastizitätsmoduls

$$E = 2 G (1 + \mu),$$

$$\sigma_{rr} = E \alpha M \frac{1}{r^2} e^{-\frac{r^2}{4 a t}}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = E \alpha M \left(\frac{1}{2 a t} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\frac{r^2}{4 a t}}. \quad (6)$$

Die Spannungen müssen aber folgenden Bedingungen genügen: für $r \rightarrow \infty$ müssen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ für jede Zeit t verschwinden, eine Forderung, die unsere Lösung bereits erfüllt.

³ Siehe Jahnke und Emde: Funktionentafeln, wo $E i(-i z) = -F(z)$ gesetzt ist.

Ferner muß für $t \rightarrow \infty$ die Scheibe spannungslos sein, denn zu dieser Zeit hat die Temperatur T in der ganzen Scheibe bereits auf Null abgenommen. Diese Bedingung ist aber nicht erfüllt, denn für $t \rightarrow \infty$ betragen die Spannungen

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E \propto M}{r^2}.$$

Um diese Spannungen zum Verschwinden zu bringen, überlagern wir den bekannten Spannungszustand einer Scheibe für $T = 0$ und beliebige Zeiten t

$$\sigma_{rr} = \frac{E \propto M}{r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E \propto M}{r^2},$$

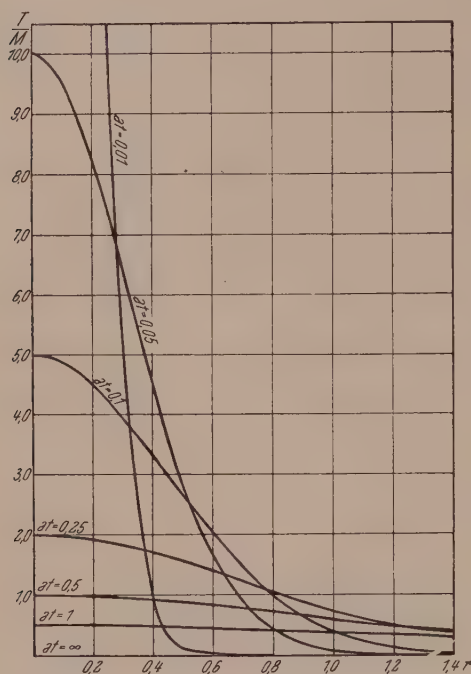


Abb. 1. Temperatur-Verlauf.

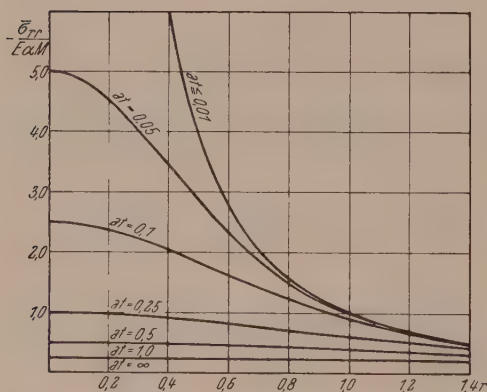


Abb. 2. Verlauf der Normalspannungen.

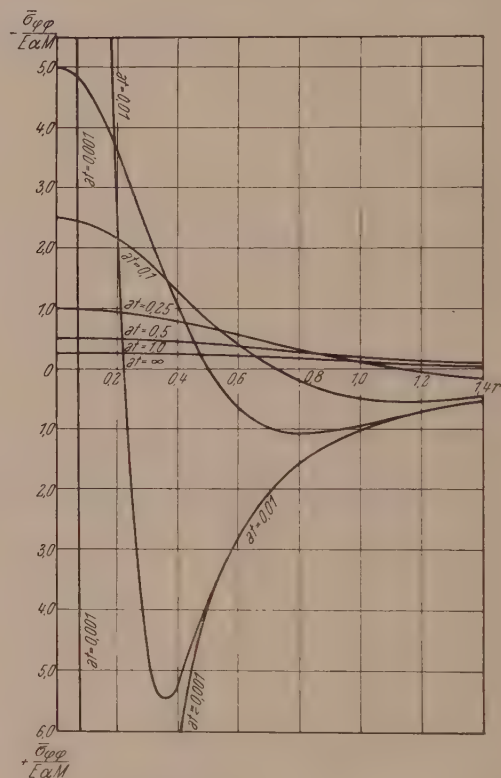


Abb. 3. Verlauf der Tangentialspannungen.

der entsteht, wenn in $r = 0$ eine allseitige Dehnung auftritt und dies gibt die endgültige Lösung

$$\sigma_{rr} = -\frac{E \propto M}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4at}} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E \propto M}{r^2} \left[\left(1 + \frac{r^2}{2at} \right) e^{-\frac{r^2}{4at}} - 1 \right].$$

Der Verlauf von T , σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ ist als Funktion von r für verschiedene Werte $a t$ in den Abb. 1 bis 3 dargestellt. Man sieht, daß im ersten Augenblick die Spannungen die Werte

$$\sigma_{rr} = -\frac{E \propto M}{r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = +\frac{E \propto M}{r^2}$$

besitzen. Ist $a = 0$, liegt also ein idealer Isolator vor, dann bleibt dieser Spannungszustand dauernd bestehen; bei dem Grenzübergang ist zu beachten, daß M für $a = 0$ einen endlichen Wert besitzt, weil das Verhältnis a/λ ebenfalls endlich bleibt.

Für $a > 0$ nehmen mit wachsender Zeit die radialen Druckspannungen σ_{rr} ab und verteilen sich dabei immer gleichmäßiger über die Scheibe. Die Ringspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ zeigen ein wesentlich anderes Verhalten. Um $r = 0$ beginnt sich sofort ein Gebiet mit Druckspannungen auszubilden, welches mit wachsender Zeit immer breiter wird und die Ringzugspannungen immer weiter nach außen abdrängt. Aus der Bedingung $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ erhält man für die Stelle, an der die Ringspannung verschwindet,

$$r = 1.1209 \sqrt{4 a t}.$$

Die Ringzugspannungen erhalten ihren größten Wert, entsprechend der Gleichung

$$\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} = 0$$

an der Stelle

$$r = 1.7927 \sqrt{4 a t}$$

mit

$$\sigma_{\varphi\varphi_{\max}} = E \propto M 0.21824 \sqrt{4 a t}.$$

In $r = 0$ sind für $t > 0$ sowohl Radialspannungen als auch Ringspannungen Druckspannungen und gleich groß, so daß sich um $r = 0$ ein Gebiet mit annähernd allseitigem Druck bildet, welches sich mit wachsender Zeit vergrößert, wobei beide Spannungen gegen Null abnehmen.

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)

Zu den Waagerechtschwingungen von Dampfturbinenfundamenten.

Von W. Mudrak, Graz.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In Erweiterung einer Anregung von J. Geiger, bei der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen tischförmiger Dampfturbinenfundamente auch die Verformung der Tischplatte zu berücksichtigen, wird der Untersuchung ein räumliches Rahmensystem zugrunde gelegt. An einem Beispiel werden die Unterschiede gegenüber der Berechnungsweise mit starrer Tischplatte aufgezeigt und die Ursachen erörtert.

Summary. When determining the natural frequencies of bench-type steam turbine foundations, the deflection of the bench plate should also be considered according to J. Geiger's suggestion. This suggestion is extended in the following paper, and a spatial frame structure is taken as a starting point of the investigation. The differences between this method of computation and the other assuming a rigid bench plate are shown by means of an example, and the causes are explained.

Résumé. Compte tenu, à l'instigation de J. Geiger, de la déformation du dessus de table pour déterminer les fréquences propres de la fondation en forme de table d'une turbine à vapeur, l'on base la recherche sur un système de cadres dans l'espace. On démontre sur un exemple les différences par rapport à la méthode de calcul dans le cas d'une dalle rigide, et on en recherche les raisons.

I. Allgemeines.

Fundamente für Dampfturbinen werden in der Regel als räumliche Rahmen erstellt, wie beispielsweise in Abb. 1 schematisch dargestellt. Wegen ihres Aufbaues aus biegesteifen Riegeln und Stielen, die in der gemeinsamen starken Grundplatte eingespannt sind, werden sie auch Tischfundamente genannt und der aus den Längs- und Querriegeln gebildete waagerechte Rahmen als Tischplatte bezeichnet. Solche

Tragwerke stellen schwingungsfähige Gebilde dar; um ihr Verhalten im Betrieb beurteilen zu können, müssen ihre Eigenschwingungszahlen bekannt sein. Entsprechend der üblichen Ausbildung mit einer lotrechten Symmetrieebene kann der Rahmen einerseits lotrechte Schwingungen, andererseits waagerechte Längs- (parallel zur Symmetrieebene) und Querschwingungen ausführen. Im folgenden sollen nur die zuletzt genannten Eigenschwingungen betrachtet werden.

Bei diesen Querschwingungen werden die Riegel auch in der Ebene der Tischplatte auf Biegung beansprucht werden. Sind sie jedoch hinreichend steif ausgebildet, so

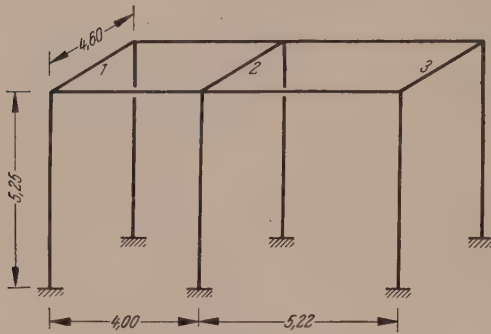


Abb. 1. Schema des Systems.

können wir von ihrer Verformung absehen und nach den Vorschriften¹ die Gesamtschwingungen einer starren Scheibe zu Grunde legen, die durch die Quer- und Längsrahmen elastisch gestützt ist. Sehr häufig sind aber einzelne Stäbe, vor allem die Zwischenquerriegel, aus betrieblichen Gründen recht schwach bemessen, so daß die obige Voraussetzung einer starren Scheibe nicht gegeben ist. Daher muß in solchen Fällen die Verformung der Tischplatte berücksichtigt werden. Dies geht wohl auf eine Anregung von J. Geiger² zurück, der schon vor einiger Zeit empfahl, die Form-

änderung der Längsriegel zu beachten. In einer Zuschrift wies E. Rausch³ auf den Einfluß der Verformung der Querriegel hin, doch wurde auch hier die Tischplatte nicht als Ganzes betrachtet, sondern jeweils nur ein Querträger mit den anschließenden Längsriegelfeldern, die in der Ebene der Nachbarquerrahmen als eingespannt angesehen wurden. Auch blieb die Steifigkeit der Stäbe gegen Verdrehung unbeachtet. Nun ist aber die Untersuchung räumlicher Rahmentragwerke mit Einschluß aller von den Stäben gebotenen Steifigkeiten im baustatischen Sinne schon vor einiger Zeit von H. Beer⁴ und V. Kupferschmid⁵ gezeigt worden. Mit diesen Verfahren können somit auch genauere Eigenschwingungszahlen ermittelt werden. An einem Beispiel sollen auch die gegenüber der Berechnung mit starrer Tischplatte auftretenden Unterschiede der Eigenfrequenzen festgestellt und die Frage behandelt werden, ob die mit Berücksichtigung der Verformung der Tischplatte bestimmten Frequenzen stets besser als jene bei Vernachlässigung dieses Einflusses sind.

II. Voraussetzungen und Berechnungsvorgang.

Im folgenden soll der räumliche Rahmen als ein System aufgefaßt werden, das aus lauter Stäben konstanten Querschnittes besteht, wobei die Stiele in der starr und unverschieblich gedachten Grundplatte eingespannt seien. Ein Kopplungseinfluß zufolge nachgiebigen Baugrundes ist in ähnlicher Weise wie üblich zu erfassen. Mit den unter ⁴ und ⁵ erwähnten Verfahren können wir zu jeder vorgegebenen Verschiebung $\zeta_k = 1$ der Knotenfigur die zugehörigen Stützstabkräfte Z_{ik} angeben, und damit

¹ DIN 4024 — Stützkonstruktionen für rotierende Maschinen (vorzugsweise Tischfundamente für Dampfturbinen), Ausgabe Januar 1955.

² J. Geiger: Über Waagerechtschwingungen bei Dampfturbinenfundamenten. Schweiz. Bau-Ztg. 68, 424—426 (1950).

³ E. Rausch: Zuschrift zum Aufsatz von Dr. Josef Geiger über Waagerechtschwingungen bei Dampfturbinenfundamenten. Schweiz. Bau-Ztg. 70, 322 (1952).

⁴ H. Beer: Beitrag zur Berechnung von räumlichen Rahmensystemen mit beweglicher Knotenfigur. Österr. Bau-Z. 3, 103—110 (1948).

⁵ V. Kupferschmid: Ebene und räumliche Rahmentragwerke. Wien: Springer-Verlag. 1952.

umgekehrt den gesamten Verschiebungszustand ζ_{ik} infolge der Einheitskraft $Z_k = 1$. In letzterem Fall umfassen die Zeiger i und k nicht nur die Knotenpunkte des Systems im engeren Sinn, die durch Stützstäbe zu einer unbeweglichen Knotenfigur gemacht werden, sondern überhaupt alle mit Massen besetzten Punkte, in denen daher bei Schwingungen Trägheitskräfte geweckt werden. Wegen der Antimetrie der auftretenden Verformungszustände ist es zweckmäßig, die Verschiebung der beiden Längsriegel parallel zur Symmetrieachse von vornherein als gegengleich in einer Verschiebungsgruppe anzusetzen. In dem als Beispiel gebrachten Fall sind also die in Abb. 2 skizzierten vier Verschiebungsfälle zu betrachten. Diesen entsprechen ebenso viele Belastungsgruppen bzw. auch Einzelkräfte Z_i . Um auch die an weiteren Punkten des Systems auftretenden Massenkkräfte zu erfassen, sind auch die Verschiebungen infolge der dortselbst angenommenen Einheitskräfte — gegebenenfalls in beiden Achsrichtungen angebracht — zu bestimmen.

Infolge einer Eigenschwingung des Systems

$$w_i(t) = \bar{w}_i \sin \omega t \quad (1)$$

treten in den einzelnen Massenpunkten die Trägheitskräfte

$$P_i(t) = -m_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} = \frac{G_i}{g} \bar{w}_i \omega^2 \sin \omega t \quad (2)$$

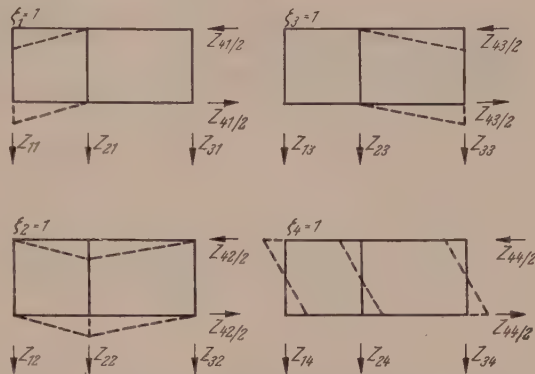


Abb. 2. Verschiebungsfälle und Stützstabkräfte.

auf und können als äußere Belastungen eingeführt werden. Es erscheint ausreichend genau, die Massenbelegung in einzelnen geeigneten Punkten zusammenzufassen. Dies erscheint schon deshalb zulässig, weil die Tischplatte zwar nicht starr, aber immerhin noch sehr steif sein wird, so daß der Unterschied der Biegelinien nicht sehr erheblich ist; auch könnte bei Bedarf durch eine Verteilung der Gesamtmasse auf mehr Teilpunkte die Genauigkeit beliebig gesteigert werden, wobei nur der Arbeitsumfang ansteigt. Außerdem geben die von maschinenbaulicher Seite gelieferten Angaben über die Lastverteilung die tatsächlichen Verhältnisse nur sehr grob wieder. Jedenfalls sind die so entstehenden Fehler nicht größer als die durch weitere Vernachlässigungen (Ausmittigkeiten usw.) begangenen. Zugleich wird der auch sonst übergangene Einfluß der Drehungsträgheit unterdrückt.

Mit den oben erwähnten ζ_{ik} -Werten folgen aus den Trägheitskräften die Verschiebungen

$$w_i = \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \frac{G_k}{g} \bar{w}_k \omega^2 \sin \omega t = \bar{w}_i \sin \omega t \quad (3)$$

oder

$$\bar{w}_i = \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} G_k \bar{w}_k \text{ für } i = 1 \text{ bis } n. \quad (4)$$

Hierin stellen die \bar{w} die Komponenten des gesuchten Verschiebungszustandes dar; der Zeiger k durchläuft alle Massen bzw. Massengruppen, zu denen die Einzelmassen wegen gleicher Verschiebungen zusammengefaßt werden können. Beispielsweise erfahren alle auf dem mit „2“ bezeichneten mittleren Querriegel sitzenden Massen die gleiche Querverschiebung \bar{w}_2 und werden daher in obiger Gleichung gemeinsam als m_2 eingeführt.

Das in den \bar{w}_k homogene Gleichungssystem führt auf die Eigenwerte ω_p und die zugehörigen Eigenlösungs-Sätze $\bar{w}_k^{(p)}$. Praktisch erfolgt die Lösung durch Iteration. Ausgehend von einem Näherungssatz von Werten \bar{w}_k , den wir in die rechte Seite der Gl. (4) einführen, erhalten wir — abgesehen von einem gemeinsamen konstanten Faktor — verbesserte Größen \bar{w}_i . Durch Wiederholung dieses Vorganges gelangen wir bekanntlich⁶ zu einem Wertesatz, der der niedrigsten Eigenlösung, also der tiefsten Eigenschwingungszahl, entspricht. Die Iteration ist so lange fortzuführen, bis an allen Punkten dasselbe Verhältnis zwischen Ausgangs- und Endwert eines Schrittes herrscht. Hieraus folgt

$$\omega_1^2 = \frac{g \bar{w}_i^{(1)}}{\sum_{k=1}^n \zeta_{ik} G_k \bar{w}_k^{(1)}} \text{ für alle } i. \quad (5)$$

Um die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Verschiebungen miteinander vergleichen zu können, wollen wir sie so normieren, daß

$$\sum_1^n G_k \bar{w}_k^2 = \sum_1^n G_k. \quad (6)$$

Um Oberschwingungen zu finden, die oft auch Bedeutung haben können, gehen wir von einem Wertesatz aus, der zu den $\bar{w}_k^{(1)}$ orthogonal ist, so daß

$$\sum_1^n G_k \bar{w}_k^{(1)} \bar{w}_k = 0. \quad (7)$$

Wäre die Orthogonalität vollkommen und nicht durch die gewählte Stellenzahl begrenzt, so müßte die Iteration auf die zweite Eigenlösung führen. Wir werden daher gezwungen sein, stets nach einigen Schritten neuerlich zu orthogonalisieren, um eine Reinigung von der stets mit enthaltenen ersten Lösung vorzunehmen. Auch ist die Konvergenz diesmal etwas langsamer. Für weitere Oberschwingungen müßten wir ähnlich vorgehen und stets dafür sorgen, daß Orthogonalität zu allen vorherigen Lösungen erfüllt ist. Die Arbeit steigt dementsprechend an. Für praktische Zwecke wird es meist hinreichen, die beiden tiefsten Eigenschwingungszahlen und die zugehörigen Schwingungsformen festzustellen. Im folgenden Beispiel soll dies geschehen und das Ergebnis der Rechnung mit starrer Tischplatte gegenübergestellt werden.

III. Beispiel.

In dem in Abb. 1 dargestellten Rahmen stellen die eingetragenen Längen bereits die nach den Richtlinien verminderten Stablängen dar, wodurch die Wirkung der steifen Ecken usw. annähernd erfaßt werden soll. In Abb. 3 sind jedem Stab die zugehörigen bezogenen Steifigkeiten beigeschrieben, die der Reihe nach einer Verdrehung des einen Stabendes um die x -, y - und z -Achse entsprechen. Als Bezugsstab wurden die quadratischen Stiele gewählt, die mit $E J_c = 1\,344\,000 \text{ tm}^2$ und $l_c = 5.25 \text{ m}$ eine Steifigkeit $\frac{E J_c}{l_c} = 256\,000 \text{ tm}$ besitzen. Um der Antimetrie Rechnung zu tragen, wurden bei den drei Querriegeln die Biegesteifigkeiten mit dem 1.5fachen und die Torsionssteifigkeiten mit dem doppelten Wert eingeführt, so daß sich die Betrachtung auf die vordere Rahmenhälfte beschränken kann. An den Knotenpunkten wurden in gleicher Weise die aus den anlaufenden Stäben resultierenden Summen als Knotensteifigkeiten angeschrieben.

Die Verteilung der Massen bzw. der Gewichte (in t), für die die Untersuchung durchgeführt werden soll, ist in Abb. 4 wiedergegeben. Bei den Lasten an den Säulen-

⁶ C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. I, S. 163—171. Berlin: Springer-Verlag. 1953.

köpfen ist jeweils ein Anteil des Säulengewichtes in der Höhe von einem Drittel des Gesamtgewichtes einer Säule eingeschlossen. Dieser Wert liegt innerhalb der theoretisch abgeleiteten Grenzen. Die Massen der Längsriegel im zweiten Feld und ein entsprechender Anteil des Maschinengewichtes sind durch die beiden Lasten von je 36 t in Feldmitte berücksichtigt.

Bevor die Ermittlung der Eigenschwingungszahlen nach dem oben dargelegten Vorgang erfolgt, soll die Aufgabe unter der Voraussetzung einer starren Tischplatte

gelöst werden. Dies liefert zugleich brauchbare Ausgangswerte für die iterative genauere Rechnung.

a) Näherungsuntersuchung (starre Tischplatte). Die bezoge-

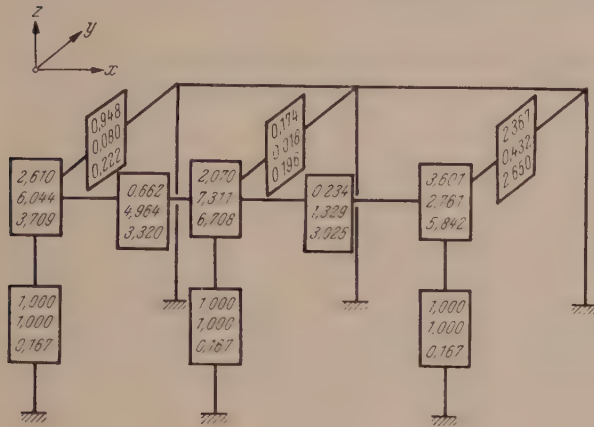


Abb. 3. Stab- und Knochensteifigkeiten bei antisymmetrischer Formänderung.

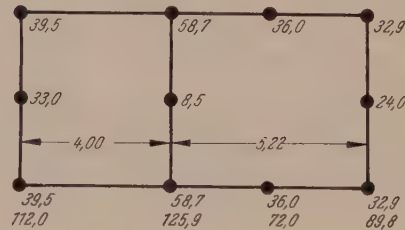


Abb. 4. Massenanzordnung auf der Tischplatte.

nen Steifigkeiten der drei Querrahmen gegen die Verschiebung „I“ des Riegels betragen $Z_I = 0.53550$, $Z_{II} = 0.31448$ und $Z_{III} = 0.67679 \text{ m}^{-2}$, so daß die gesamte Rückhaltung $\sum Z_Q = 1.52677 \text{ m}^{-2}$. Der elastische Schwerpunkt O folgt mit diesen Werten in $r = 0.911 \text{ m}$ vom mittleren Rahmen aus gerechnet. Je ein Längsrahmen liefert die Steifigkeit $Z_L = 1.10637$. Mit Einschluß der Torsionssteifigkeit der Stiele von je $\nu = 0.167$, erhalten wir die Gesamtsteifigkeit der Stützung gegen eine Verdrehung der Tischplatte um O zu

$$D = \sum Z_Q (e_Q - r)^2 + 2 Z_L \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \sum \nu = 38.44781;$$

hieraus folgt $e^2 = \frac{D}{\sum Z_Q} = 25.18245 \text{ m}^2 = \frac{\delta}{\varphi}$ (nach Rausch).

Die Gesamtlast auf der Tischplatte $\sum G = 399.7 \text{ t}$ hat ihren Schwerpunkt S in $x = 0.522 \text{ m}$ und weist ein Gesamt-Trägheitsmoment um S von $J = 6388.35 \text{ tm}^2$ auf. Damit wird $i^2 = \frac{J}{\sum G} = 15.98286 \text{ m}^2$, während der Abstand von S und O zu $s = 0.389 \text{ m}$ folgt.

Für die beiden Schwingungs-Drehpole gelten die Abstände p von S aus der Gleichung

$$p^2 - \frac{e^2 + s^2 - i^2}{s} p - i^2 = 0$$

mit den Lösungen $p_1 = 24.678 \text{ m}$ und $p_2 = -0.648 \text{ m}$. Hieraus folgen mit der Normierungsbedingung (6) die in Tab. 1 gegebenen Verschiebungen, während für die Kreisfrequenzen gilt

$$\frac{m \omega^2}{\sum Q} = \frac{1}{2} \left[\frac{i^2 + s^2 + e^2}{i^2} \mp \sqrt{\frac{(i^2 + s^2 - e^2)^2 + 4 s^2 e^2}{i^4}} \right] \quad (8)$$

Tabelle 1.

k	$\bar{w}_k^{(1)}$	$\bar{w}_k^{(2)}$
1	1·16802	— 0·95650
2	1·00802	+ 0·03111
m	0·90361	+ 0·67555
3	0·79921	+ 1·31999
4	0·09200	— 0·56790

mit $m = \frac{\Sigma G}{g} = 40·744 \text{ tsek}^2\text{m}^{-1}$ und $\Sigma Q = 256000 \cdot 1·52677 = 390853 \text{ t/m}$. Damit werden $\omega_1 = 97·17$ und $\omega_2 = 123·91$ und die Eigenschwingungszahlen $n_{s1} = 928$ und $n_{s2} = 1183$ je Minute.

b) Genauere Ermittlung der Schwingungszahlen (verformte Tischplatte). Auf baustatischem Wege folgten für die in Abb. 2 dargestellten Einheits-Verschiebungen die Stützstabkräfte:

$$Z_{11} = 1·55596, Z_{12} = Z_{21} = -1·68147, Z_{13} = Z_{31} = 0·63028, Z_{14} = Z_{41} = -0·00617,$$

$$Z_{22} = 3·78832, Z_{23} = Z_{32} = -1·69244, Z_{24} = Z_{42} = -1·12832, Z_{33} = 1·72192,$$

$$Z_{34} = Z_{43} = 1·13452, Z_{44} = 4·96262 \text{ m}^{-2}.$$

Durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^n Z_{ik} \zeta_k = B_i, \quad i = 1 \dots n$$

folgen die Einflußzahlen für die Verschiebungen, so daß sich diese durch die Belastungsgrößen B_i darstellen lassen. Durch eine hier nicht wiedergegebene Zusatzrechnung wurden auch die Beiwerte für die Belastungen B_m ermittelt, die den Lasten bzw. Massen in der Mitte des zweiten Feldes entsprechen. Es wird

$$\bar{w}_1 = 1·33162 B_1 + 0·66635 B_2 + 0·32872 B_m + 0·07843 B_3 + 0·13522 B_4,$$

$$w_2 = 0·66635 B_1 + 0·80441 B_2 + 0·67881 B_m + 0·50091 B_3 + 0·06914 B_4,$$

$$\bar{w}_m = 0·32872 B_1 + 0·67881 B_2 + 0·84071 B_m + 0·83800 B_3 - 0·00334 B_4,$$

$$\bar{w}_3 = 0·07843 B_1 + 0·50091 B_2 + 0·83800 B_m + 1·14110 B_3 - 0·14690 B_4,$$

$$w_4 = 0·13522 B_1 + 0·06914 B_2 - 0·00334 B_m - 0·14690 B_3 + 0·25098 B_4.$$

Wenn wir vorläufig mit den verzerrten Verschiebungen und auch mit den Gewichten statt den Massen rechnen, so können wir mit den in Abb. 4 unten angeschriebenen Lastensummen für die einzelnen Linien schreiben: $B_1 = 112·0 \cdot \bar{w}_1$, $B_2 = 125·9 \bar{w}_2$, $B_m = 72·0 \bar{w}_m$, $B_3 = 89·8 \bar{w}_3$, $B_4 = 334·2 \bar{w}_4$. Setzen wir nun willkürliche Ausgangswerte für die \bar{w}_k , beispielsweise die unter a) in Tab. 1 erhaltenen, in die Ausdrücke für die B_k und diese wieder in die rechte Seite des obigen Gleichungssystems ein, so

ergibt sich durch Wiederholung dieses ersten Iterationsschrittes und Normierung des schließlich erhaltenen Wertesatzes die erste Spalte der Tab. 2. Das für alle Punkte gleiche Verhältnis zwischen Ausgangs- und Endwert eines Iterationsschrittes beträgt $\lambda_1 = 260·066$.

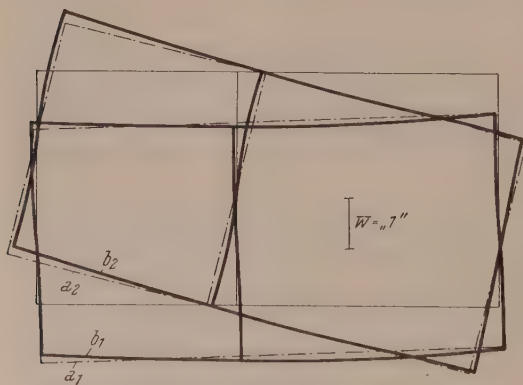


Abb. 5. Eigenschwingungsformen der ersten zwei Frequenzen, Fall a) und b).

Tabelle 2.

k	$\bar{w}_k^{(1)}$	$\bar{w}_k^{(2)}$
1	1·08439	— 1·05844
2	1·04983	+ 0·00487
m	0·95937	+ 0·68114
3	0·82224	+ 1·28972
4	0·08221	— 0·52310

Ein gemäß (7) zu den $w_k^{(1)}$ orthogonaler Satz von Ausgangswerten \bar{w}_k führt nach Iteration und Normierung zu der in Spalte 2 von Tab. 2 wiedergegebenen Lösung $\bar{w}_k^{(2)}$ mit $\lambda_2 = 147.276$. In Abb. 5 sind die $w_k^{(p)}$ aus a) und b) zum Vergleich dargestellt. Der Deutlichkeit wegen wurde der Unterschied beider Biegelinien verdoppelt. Da nun

$$256\,000 \cdot \frac{\bar{w}_i g}{\omega^2} = \sum \zeta_{ik} G_k w_k = \lambda \bar{w}_i,$$

wird

$$\omega^2 = \frac{256\,000 g}{\lambda},$$

mithin $\omega_1 = 98.2681$, $\omega_2 = 130.5836$ und die Eigenschwingungszahlen $n_1 = 938.4$ und $n_2 = 1247.0$ je Minute.

Dieses Ergebnis überrascht, denn die nun gefundenen Eigenfrequenzen liegen über jenen, die sich nach der üblichen Berechnung mit starrer Tischplatte ergeben hatten. Die Durchfederung der Tischplatte müßte doch eine Verminderung der Steifigkeit des Systems und damit niedrigere Eigenfrequenzen bewirken. Bei der üblichen Berechnung wird aber die Tischplatte nur als in ihrer Ebene starre Scheibe angesehen; die Torsionssteifigkeit der Querriegel bedingt jedoch eine so große Aussteifung der Längsrahmen, daß sie die Durchbiegung der Längsträger mehr als ausgleicht. Die einseitige Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Längsträger kann daher zu einer Verschlechterung der Ergebnisse führen.

IV. Schlußfolgerung.

In solchen Fällen, wo die Querträger dank ihrer Torsionssteifigkeit noch eine merkliche Erhöhung des Widerstandes der Längsrahmen erwarten lassen, empfiehlt es sich, die Untersuchung ähnlich wie im vorliegenden Beispiel auf einem räumlichen Rahmensystem aufzubauen. Dies wird insbesondere bei tief abgestimmten Fundamenten zu beachten sein, um durch die zu erwartende Erhöhung der Frequenz nicht zu nahe an die Betriebsdrehzahl zu kommen.

(Eingegangen am 15. April 1955.)

Die Durchschlagslast von Platten.

Von H. Nylander, Stockholm.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Der Durchschlag von Platten mit Aufwärtswölbung wird ausgehend von den Differentialgleichungen für initial deformierte Platten mit großen Durchbiegungen studiert.

Die initiale Aufwärtswölbung ist affin zur Zusatzdurchbiegung gewählt. Die Lösung für die initial ebene Platte wird ausgenutzt.

Für diese wird der Zusammenhang zwischen Belastung und Durchbiegung approximativ geschrieben:

$$\frac{q_0 b^4}{E h_0^4} = \gamma \frac{w_{0m}}{h_0} + \delta \left(\frac{w_{0m}}{h_0} \right)^3.$$

Die Durchschlagslast wird als Funktion von γ und δ gegeben. Beispiele.

Summary. Starting from the differential equations for initially deformed plates with large deflections, the breakdown of plates with upward curvature is investigated in this paper. The initial upward curvature is assumed in affinity to the additional deflection. The solution for the initially flat plate is made use of, the relation between load and deflection being approximatively written:

$$\frac{q_0 b^4}{E h_0^4} = \gamma \frac{w_{0m}}{h_0} + \delta \left(\frac{w_{0m}}{h_0} \right)^3.$$

The breaking load is given as a function of γ and δ . Examples.

Résumé. La rupture de dalles bombées vers le haut est étudiée en partant des équations différentielles de dalles initialement déformées à fortes flexions.

$$\frac{q_0 b^4}{E h_0^4} = \gamma \frac{w_{0m}}{h_0} + \delta \left(\frac{w_{0m}}{h_0} \right)^3.$$

Le bombage initial vers le haut est choisi en affinité avec les flexions supplémentaires. On utilise la solution de la dalle initialement plane.

Pour celle-ci, on pose approximativement le rapport entre la charge et la flexion:

La charge de rupture s'exprime sous forme de fonction de γ et δ . Exemples.

Bei der Belastung einer Platte mit initialer Aufwärtswölbung, die auch als eine flache, doppelt gekrümmte Schale gemäß Abb. 1 aufgefaßt werden kann, tritt bei hinreichend großer Wölbung und genügend hoher Last eine Erscheinung auf, welche

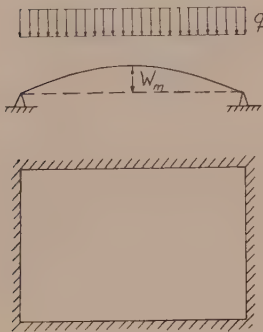


Abb. 1.

darin besteht, daß die Platte mit einem Schlag auf eine endlich nahe gelegene Gleichgewichtslage mit nunmehr konkaver, abwärts gewölbter Oberfläche umschlägt. Dabei schlägt die Platte durch die ebene Lage hindurch. In der Literatur wurden diese sog. Durchschlagserscheinungen für Balken mit initialer Aufwärtswölbung von Biezeno¹ und Marguerre², für die kreisrunde Platte von Biezeno³, für Kugelschalen von von Kármán und Tsien⁴ und für zylindrische Schalen von Donnell⁵ behandelt. Dagegen scheinen rechteckige Platten noch nicht behandelt worden zu sein und kreisrunde Platten nur in Anknüpfung an von Kármáns Studie der Kugelschale und für den von Biezeno untersuchten Belastungsfall mit einer Punktlast in der Mitte der frei aufliegenden kreisrunden Platte.

Die Methode zur Untersuchung von Platten mit Initialdeformation, die der Verfasser veröffentlicht hat⁶, bietet gleichzeitig die Basis für das Studium der Durchschlagserscheinungen. Ein diesbezüglicher Hinweis findet sich im Beispiel 4 in dem genannten Aufsatz⁶. Hier soll die Behandlung der Durchschlagserscheinungen vertieft werden.

Die Behandlung wird auf das Studium der reinen Durchschlagserscheinungen beschränkt, weshalb Beulerscheinungen nicht vollständig behandelt werden. Besonders bei größeren Initialdeformationen kann die Platte in mehreren Wellen ausbeulen, noch bevor sie im ganzen durchschlägt.

Im folgenden wird die Theorie sowohl für kreisrunde als auch für rechteckige Platten aufgestellt. Dabei ist es notwendig, die grundlegenden Gleichungen anzugeben, um das Studium der in diesem Zusammenhang wesentlichen Grenzbedingungen zu ermöglichen.

I. Grundgleichungen für kreisrunde Platten mit polar-symmetrischer Belastung und Deformation.

Im folgenden werden die grundlegenden Gleichungen für die dünne Platte mit großen Deformationen gegeben. Da sie bereits früher abgeleitet wurden [Föppl⁷,

¹ C. B. Biezeno: Über eine Stabilitätsfrage beim gelenkig gelagerten, schwach gekrümmten Stäbe. Proc., Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam (1929).

² K. Marguerre: Die Durchschlagkraft eines schwach gekrümmten Balkens. S.-B. Berliner Math. Ges. (1938).

³ C. B. Biezeno: Über die Bestimmung der Durchschlagkraft einer schwach gekrümmten, kreisförmigen Platte. Z. angew. Math. Mech. (1938).

⁴ Th. von Kármán und H.-S. Tsien: The Buckling of Spherical Shells by External Pressure. J. aeronaut. Sci. (1939).

⁵ L. H. Donnell: J. appl. Mech. 73 (1950).

⁶ H. Nylander: Initially Deflected Thin Plate with Initial Deflection Affine to Add. Defl. Int. Ver. für Brückenbau u. Hochbau, Abh. Bd. 11. 1951.

⁷ A. Föppl: Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. V. 1907.

Nádái⁸, von Kármán⁹ (ebene Platte), Marguerre¹⁰, Massonet¹¹ (initial deformierte Platte)], sind die Ableitungen hier nicht im einzelnen durchgeführt.

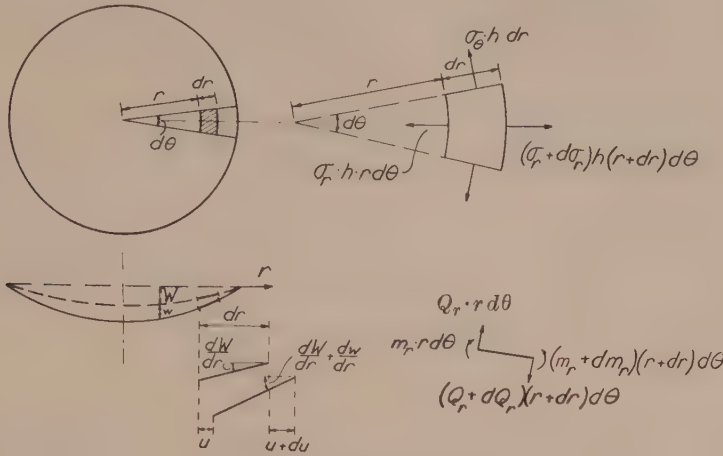


Abb. 2. Bezeichnungen.

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

u = Deformationskomponente in radialer Richtung.

W = initiale Durchbiegung.

w = Zusatzdurchbiegung.

h = Plattendicke.

$N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ = Biegesteifigkeit der Platte.

q_r = mit r veränderliche Belastungsintensität.

σ_r = Membranspannung in radialer Richtung.

σ_θ = Membranspannung in tangentialer Richtung.

ε_r = Dehnung in radialer Richtung.

ε_θ = Dehnung in tangentialer Richtung.

Die übrigen verwendeten Bezeichnungen gehen aus Abb. 2 hervor.

Für ε_r und ε_θ erhält man folgende Ausdrücke (vgl. Abb. 2):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{dr} \left[\sqrt{(dr + du)^2 + dr^2 \left(\frac{dW}{dr} + \frac{dw}{dr} \right)^2} - \sqrt{dr^2 + dr^2 \left(\frac{dW}{dr} \right)^2} \right] = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dW}{dr} \frac{dw}{dr}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} u. \quad (2)$$

Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen wird die Neigung und die Krümmung in radialer Richtung als so klein angesehen, daß man es vernachlässigen kann, daß die beiden Resultanten der Kräfte $\sigma_\theta h dr$ und $\sigma_r h r d\theta$ und $\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \right) h (r + dr) d\theta$

⁸ A. Nádái: Elastische Platten. Berlin. 1925.

⁹ Th. von Kármán: Encyklopädie der Math. Wiss., Bd. IV, S. 349. 1910.

¹⁰ K. Marguerre: Proc. of 5th Int. Congr. for Appl. Mech., Vol. V, Cambridge, Mass. 1939.

¹¹ Ch. Massonet: Buckling of Plates, Schlußbericht, Int. Ver. Brückenbau u. Hochbau, 1948.

nicht in derselben Ebene liegen und daß weiter die vertikale Belastung eine Komponente in der Fläche des deformierten Elements hat. Diese Einschränkungen stellen die Grenze gegen die Theorie für Schalen mit größerer Pfeilhöhe dar und sind dieselben, wie sie in der Literatur bei der Berechnung dünner Membrane vorkommen. Die Ergebnisse sind mit Vorsicht zu verwenden bei maximalen Durchbiegungen $\geq 1/10$ des Plattenradius.

Zwischen den Komponenten der Membranspannung und den Deformationskomponenten erhält man folgende Beziehungen:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dW}{dr} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{dW}{dr} \frac{dw}{dr} \right]. \quad (4)$$

Die Projektionsgleichung in radialer Richtung ergibt:

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (5)$$

Die Gl. (3) und (4) ergeben eine Beziehung zwischen σ_r , σ_θ , W und w , die zusammen mit Gl. (5) nach einigen Transformationen ergibt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{h^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{h^2 r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = \\ & = -E \left(\frac{1}{h^2 r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{h^2 r} \frac{d^2W}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{h^2} \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Projektionsgleichung in vertikaler Richtung ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{h} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{h} \frac{dw}{dr} \right) \frac{1}{h^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r h^2} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{1}{h} \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2w}{dr^2} \right) = \\ & = -\frac{q_r}{h^4} + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{h} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{h} \frac{dw}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

In Gl. (6) und (7) ist die Spannungsfunktion definiert durch

$$\frac{1}{h^2} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{h^2} \sigma_r, \quad (8)$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{1}{h^2} \sigma_\theta. \quad (9)$$

Die Gl. (6) und (7) enthalten die Gleichgewichtsbedingung für die Platte. Da die Gl. (6) außerdem die aus dem Hookeschen Gesetz abgeleitete Beziehung zwischen σ_r , σ_θ , w und W befriedigt, ist auch die Kontinuitätsbedingung erfüllt.

Eine Lösung, die den Gl. (6) und (7) und außerdem noch den Grenzbedingungen für einen aktuellen Belastungsfall genügt, stellt die Lösung des Problems dar.

Mit der bekannten Spannungsfunktion Φ erhält man σ_r und σ_θ aus Gl. (8) und (9).

Bei einer initial deformierten Platte kann die Form der Initialdurchbiegung innerhalb gewisser Grenzen variieren. Die Behandlung beschränkt sich hier auf den Fall, bei dem die Initialdurchbiegung W dauernd affin zur Zusatzdurchbiegung w ist, das heißt

$$W = k w. \quad (10)$$

Das bedeutet, daß die Lösungen für eine Form der Initialdurchbiegung angegeben werden, die mit der Belastung variiert. Hinterher kann aus der Durchbiegungsform w_0 für die initial ebene Platte die Deformationsform für W bestimmt werden.

Mit der Einschränkung nach Gl. (10) werden die Gl. (6) und (7)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{1}{h^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{h^2 r} \frac{d\Phi}{dr}\right) = -E \left[\frac{1}{h^2 r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} (1 + 2k)\right], \quad (6')$$

$$\begin{aligned} & (1+k) \left(\frac{1}{r} \frac{1}{h} \frac{dw}{dr} \frac{1}{h^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r h} \frac{d^2w}{dr^2} \frac{1}{h^2} \frac{d\Phi}{dr}\right) = \\ & = -\frac{q_r}{h^4} + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{1}{h} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{h} \frac{dw}{dr}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7')$$

Wäre die Platte von Anfang an eben ($W = 0$), so entsprächen den Gl. (6) und (7) folgende Gleichungen:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{1}{h_0^2} \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{1}{h_0^2 r} \frac{d\Phi_0}{dr}\right) = -E \left(\frac{1}{h_0^2 r} \frac{dw_0}{dr} \frac{d^2w_0}{dr^2}\right), \quad (6'')$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{1}{h_0} \frac{dw_0}{dr} \frac{1}{h_0^2} \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{1}{r h_0^2} \frac{d\Phi_0}{dr} \frac{1}{h_0} \frac{d^2w_0}{dr^2} = \\ & = -\frac{q_{r_0}}{h_0^4} + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{1}{h_0} \frac{d^2w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{h_0} \frac{dw_0}{dr}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7'')$$

Hier sind die entsprechenden Bezeichnungen wie für die initial deformierte Platte eingeführt. Der Index 0 an den entsprechenden Größen bezieht sich auf die initial ebene Platte, das heißt

$$\frac{1}{h_0^2} \frac{1}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} = \frac{1}{h_0^2} \sigma_{r_0}, \quad (8')$$

$$\frac{1}{h_0^2} \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} = \frac{1}{h_0^2} \sigma_{\theta_0}. \quad (9')$$

Ein Vergleich zwischen den Gl. (6') und (7') auf der einen und (6'') und (7'') auf der anderen Seite ergibt, daß die Lösungen für die initial ebene Platte zur Gewinnung der Lösungen für die initial deformierte Platte benützt werden können.

Wir sehen somit, daß, wenn Werte $\frac{w_0}{h_0}$, $\frac{\Phi_0}{h_0^2}$ und $\frac{q_{r_0}}{h_0^4}$ existieren, die die Gleichgewichtsbedingungen (6'') und (7'') erfüllen [von denen (6'') auch die Kontinuitätsbedingung erfüllt], und wenn wir setzen

$$\frac{w}{h} = \beta \frac{w_0}{h_0}, \quad (11)$$

wobei β eine Konstante ist, so gibt der Vergleich zwischen (6') und (6'') die Bedingung

$$\frac{\Phi}{h^2} = \frac{\Phi_0}{h_0^2} (1 + 2k) \beta^2. \quad (12)$$

Soll Gl. (7') gleichzeitig mit der Gl. (7'') befriedigt sein, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (11) und (12) die Bedingungen

$$(1+k)(1+2k)\beta^2 = 1, \quad (13)$$

$$\frac{q_r}{h^4} \frac{h_0^4}{q_{r_0}} = \beta. \quad (14)$$

Aus Gl. (13) kann β berechnet werden und die Bedingungen (11), (12) und (14) können geschrieben werden:

$$\frac{w}{h} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1+k)(1+2k)}} \frac{w_0}{h_0}, \quad (15)$$

$$\frac{\Phi}{h^2} = \frac{1}{1+k} \frac{\Phi_0}{h_0^2}, \quad (16)$$

$$\frac{q_r}{h^4} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1+k)(1+2k)}} \frac{q_{r_0}}{h_0^4}. \quad (17)$$

Wenn die Gl. (15), (16) und (17) erfüllt sind und wenn die Gl. (6'') und (7'') für die initial ebene Platte durch $\frac{w_0}{h_0}$, $\frac{\Phi_0}{h_0^2}$ und $\frac{q_{r0}}{h_0^4}$ befriedigt werden, so sind auch die Gl. (6') und (7') für die initial deformierte Platte mit $W = k w$ erfüllt.

Damit aber die Lösungen für die Gleichgewichts- und Kontinuitätsgleichungen auch die tatsächlichen Lösungen sind, müssen gleichzeitig auch die Grenzbedingungen erfüllt sein. Diese werden oft als Bedingung für die Deformations- oder Spannungs-komponenten oder für die Momente formuliert. Deshalb ist es wünschenswert, den Zusammenhang zwischen diesen Größen bei der initial deformierten und initial ebenen Platte näher zu studieren, wenn die Bedingungen (15), (16) und (17) erfüllt sind.

Für die initial ebene Platte gilt nach Gl. (1) und (2) mit $W = 0$

$$E \left[\frac{1}{h_0^2} \frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_0^2} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right] = \frac{1}{h_0^2} \sigma_{r0} - \frac{\nu}{h_0^2} \sigma_{\theta 0}, \quad (18)$$

$$E \frac{1}{r} \frac{u_0}{h_0^2} = \frac{1}{h_0^2} \sigma_{\theta 0} - \nu \frac{1}{h_0^2} \sigma_{r0}. \quad (19)$$

Für die initial deformierte Platte lauten die entsprechenden Beziehungen:

$$E \left[\frac{1}{h^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \frac{1}{h^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 (1 + 2k) \right] = \frac{1}{h^2} \sigma_r - \nu \frac{1}{h^2} \sigma_\theta, \quad (18')$$

$$E \frac{1}{r} \frac{u}{h^2} = \frac{1}{h^2} \sigma_\theta - \nu \frac{1}{h^2} \sigma_r. \quad (19')$$

Unter Beachtung von Gl. (8), (8'), (9), (9') und (16) ergibt der Vergleich zwischen Gl. (19) und (19')

$$\frac{u}{h^2} = \frac{1}{1+k} \frac{u_0}{h_0^2}. \quad (20)$$

Dasselbe Resultat erhält man aus einem Vergleich zwischen Gl. (18) und (18'), wenn der Zusammenhang von Gl. (15) beachtet wird. Die Beziehungen (15), (16), (17) und (20) gelten somit zwischen der initial ebenen und der initial deformierten Platte, wenn die Initialdeformation W bei der initial deformierten Platte als affin zu der zusätzlichen Deformation w vorausgesetzt wird, das heißt $W = k w$. Da die genannten Beziehungen daraus abgeleitet wurden, daß die Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen erfüllt sein sollen, ist es nötig, damit die Lösungen für die initial ebene Platte ausgenützt werden können, daß in jedem speziellen Fall kontrolliert wird, ob die Grenzbedingungen erfüllt sind.

II. Rechteckige Platten.

Für rechteckige Platten wurden vom Verfasser schon früher die entsprechenden Überlegungen angestellt wie für kreisrunde Platten⁶. Hierbei wurden die Grundgleichungen für ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit x - und y -Achse // zu den Plattenkanten aufgestellt.

Folgende neue Bezeichnungen werden eingeführt:

u = Deformationskomponente // zur x -Achse in der Plattenebene.

v = Deformationskomponente // zur y -Achse in der Plattenebene.

w = Durchbiegung der Platte.

σ_x = Membranspannung // zur x -Achse in der Plattenebene.

σ_y = Membranspannung // zur y -Achse in der Plattenebene.

τ_{xy} = Schubspannung // zur x - oder y -Achse in der Plattenebene.

Φ = Airys Spannungsfunktion.

$$\tau_{xy} = -\frac{d^2\Phi}{dx dy}.$$

$$\sigma_x = \frac{d^2\Phi}{dy^2}.$$

$$\sigma_y = \frac{d^2\Phi}{dx^2}.$$

Unter Auslassung der Zwischenrechnungen erhält man folgende Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen bei der initial deformierten und der initial ebenen Platte unter Voraussetzung der Affinität zwischen initialer Wölbung W und zusätzlicher Durchbiegung w , das heißt $W = kw$:

$$\frac{w}{h} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1+k)(1+2k)}} \frac{w_0}{h_0}, \quad (21)$$

$$\frac{\Phi}{h^2} = \frac{1}{1+k} \frac{\Phi_0}{h_0^2}, \quad (22)$$

$$\frac{q_{xy}}{h^4} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1+k)(1+2k)}} \frac{q_{xy0}}{h_0^4} \quad (23)$$

und

$$\frac{u}{h^2} = \frac{1}{1+k} \frac{u_0}{h_0^2}, \quad (24)$$

$$\frac{v}{h^2} = \frac{1}{1+k} \frac{v_0}{h_0^2}. \quad (25)$$

III. Bestimmung der Durchschlagslast.

Die oben angegebenen Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen bei der initial ebenen und der initial deformierten Platte können dazu verwendet werden, aus bekannten Lösungen für die initial ebene Platte die Deformationen und Spannungen bei der initial deformierten Platte zu bestimmen.

In ⁶ hat der Verfasser eine solche Behandlung für eine Reihe verschiedener Auflagerungsfälle durchgeführt. In diesem Zusammenhang interessiert der Zusammenhang zwischen Durchbiegung (beispielsweise in der Plattenmitte) und Belastung. Die Lösungen für verschiedene Belastungsfälle der initial ebenen Platte sind in der Literatur gegeben. Beim Studium der Ergebnisse dieser verschiedenen Behandlungen hat sich gezeigt, daß die Beziehung zwischen Belastung und Durchbiegung w_{0m} in der Plattenmitte mit guter Näherung in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{q_0 b^4}{E h_0^4}\right) = \gamma \frac{w_{0m}}{h_0} + \delta \left(\frac{w_{0m}}{h_0}\right)^3, \quad (26)$$

wobei q_0 die Belastungsintensität ist, b die Kantenlänge oder der Durchmesser der Platte und γ und δ Koeffizienten, die die Form der Kurve charakterisieren.

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (26) gibt die Wirkung der Plattenbiegung nach der linearen Theorie (kleine Durchbiegungen im Verhältnis zur Plattendicke). Das zweite Glied liefert eine Korrektur als Folge der Membranwirkung. Wenn die Lösung für die dünne Membran ohne Biegesteifigkeit eine geometrisch ähnliche Biegungsfläche ergeben würde wie die Biegungsfläche der Platte mit geringer Durchbiegung, so wäre die Gl. (26) die exakte Lösung. In diesem Fall würde es ausreichen, γ aus der Lösung für die Platte mit geringer Durchbiegung zu bestimmen und δ aus der Lösung für die Membran.

Nun sind aber die Durchbiegungsformen bei der Plattenbiegung mit geringer Durchbiegung und bei der Membrandeformation nicht affin. Daraus folgt, daß die Durchbiegungsform sich mit der Belastung ändert — mit wachsender Last wächst der Einfluß der Membrandeformation. Wenn man γ den Wert nach der linearen Platten-theorie gibt und δ so bestimmt, daß die Gl. (26) übereinstimmt mit der genauen

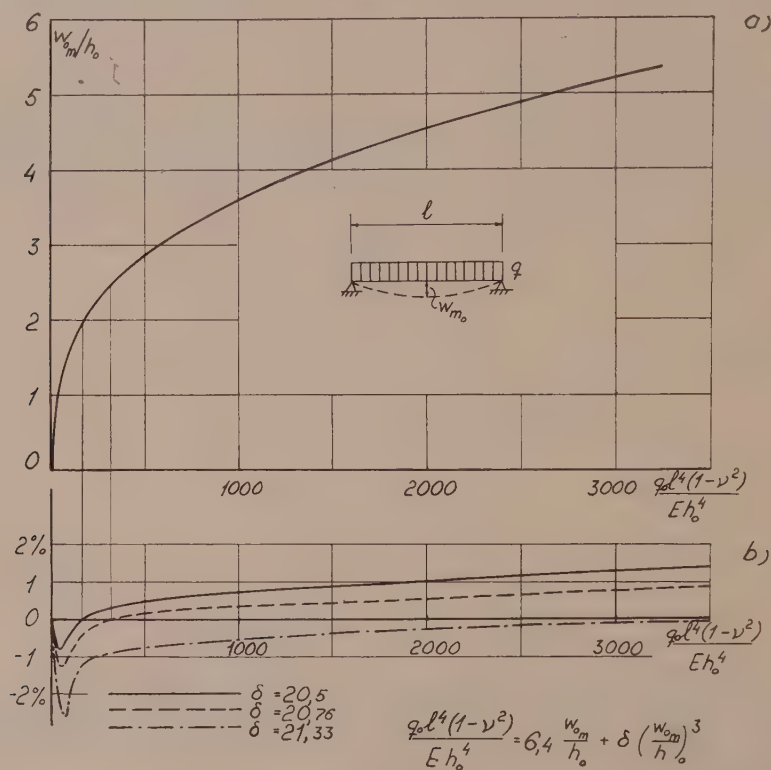


Abb. 3. a) Zusammenhang zwischen $\frac{w_{0m}}{h}$ und Belastung bei ∞ langgestreckter Platte, berechnet nach exakter Theorie. Die Platte ist an den Stützen gelenkig und unverschiebbar gelagert. b) Unterschied in % zwischen $\frac{w_{0m}}{h}$, berechnet einerseits nach Näherungsformel (26) für verschiedene Werte von δ und andererseits nach der exakten Theorie.

Lösung für einen relativ großen Wert von $\frac{w_{0m}}{h_0}$, kann gezeigt werden, daß die Gl. (26) mit einem nur kleinen Fehler die Beziehung zwischen $\frac{w_{0m}}{h_0}$ und $\frac{q b^4}{E h^4}$ bestimmt. Das wird durch Abb. 3 verdeutlicht, die den Fehler in $\frac{w_{0m}}{h_0}$ bei einer langgestreckten, frei aufliegenden, mit gleichmäßig verteilter Last belasteten Platte zeigt.

Wie schon früher, wird bei der Behandlung einer initial deformierten Platte vorausgesetzt, daß die Initialdurchbiegung W affin ist zur Zusatzdurchbiegung w [s. Gl. (10)].

Die Größe der Initialdurchbiegung ist definiert durch die Beziehung

$$W_m = \alpha h = k w_m, \quad (27)$$

wobei W_m die initiale Durchwölbung in der Mitte ist und α eine Konstante, die die Größe der Initialdeformation angibt.

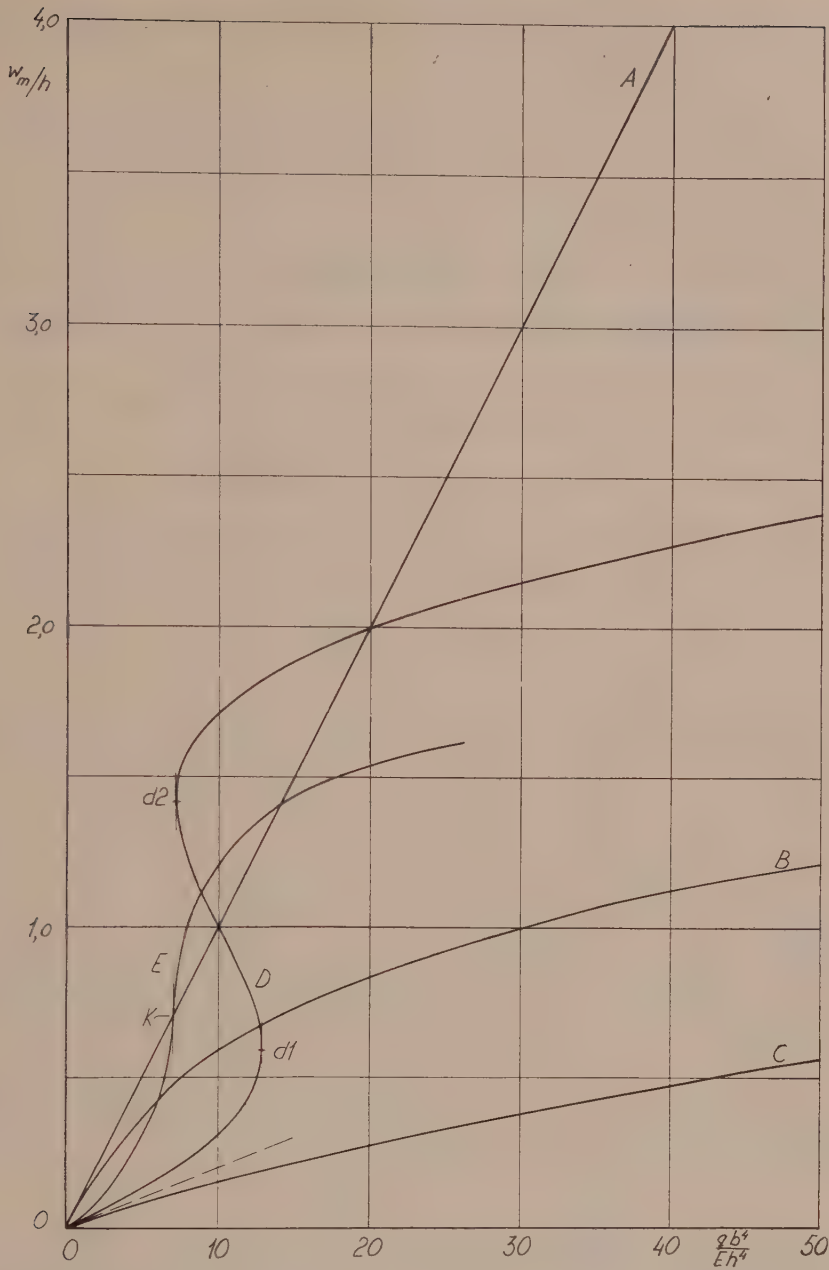


Abb. 4. Zusammenhang zwischen $\frac{w_m}{h}$ und Belastung für einen hypothetischen Fall mit $\gamma = 10$, $\delta = 20$.

Aus Gl. (27) kann k errechnet werden:

$$k = \alpha \frac{1}{\frac{w_m}{h}}. \quad (28)$$

Wenn man von Gl. (26) für die initial ebene Platte ausgeht, kann man die entsprechende Beziehung für die initial deformierte Platte wie folgt ableiten:

Aus Gl. (15) und (17) bzw. aus (21) und (23) kann folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$\frac{q b^4}{E h^4} = \frac{q_0 b^4}{E h_0^4} \cdot \frac{\frac{w_m}{h}}{\frac{w_{0m}}{h_0}}$$

oder unter Beachtung des Ansatzes (26)

$$\frac{q b^4}{E h^4} = \frac{w_m}{h} \left[\gamma + \delta \left(\frac{w_{0m}}{h_0} \right)^2 \right]$$

oder mit Rücksicht auf (15) bzw. (21)

$$\frac{q b^4}{E h^4} = \frac{w_m}{h} \left[\gamma + \delta (1 + 2k) (1 + k) \left(\frac{w_m}{h} \right)^2 \right]. \quad (29)$$

Setzt man den Wert k nach Gl. (28) ein, so erhält man

$$\frac{q b^4}{E h^4} = \frac{w_m}{h} \left\{ \gamma + \delta \left[2 \alpha^2 + 3 \alpha \frac{w_m}{h} + \left(\frac{w_m}{h} \right)^2 \right] \right\}, \quad (30)$$

welche Gleichung unter den genannten Voraussetzungen den Zusammenhang zwischen der Durchbiegung in der Plattenmitte und der Belastung der initial deformierten Platte ergibt.

Die Kurven in Abb. 4 stellen die Beziehung zwischen $\frac{q b^4}{E h^4}$ und $\frac{w_m}{h}$ dar. Die verschiedenen Kurven entsprechen einem hypothetischen Fall, bei dem $\gamma = 10$ und $\delta = 20$. Linie *A* entspricht der linearen Theorie für die initial ebene Platte.

Kurve *B* entspricht der initial ebenen, mit Rücksicht auf den Membraneffekt berechneten Platte. Der Platte mit initialer Durchbiegung entspricht Kurve *C* ($\alpha = 1$).

Die Kurve *D* entspricht initialer Aufwärtswölbung ($\alpha = -1$). Kurve *D* ($\alpha = -1$) und Kurve *C* ($\alpha = +1$) haben gemeinsame Ursprungstangente. Mit wachsender Last wächst $\frac{w}{h}$ immer schneller für $\alpha = -1$. In Punkt *d 1* ist keine Belastungssteigerung mehr nötig, um die Durchbiegung zu vergrößern. In diesem Punkt tritt Durchschlag der Platte ein. Wäre die Last unverändert, so würde die Platte durch die ebene Lage schlagen. Wenn der Platte eine stetig zunehmende Durchbiegung aufgezwungen wird, würde die Kurve *D* auch nach *d 1* gelten.

Aus Gl. (30) wird der Wert von $\frac{q b^4}{E h^4}$ im Durchschlagspunkt *d 1* bestimmt.

Das Kriterium für den Durchschlag ist offensichtlich, daß

$$\frac{d\left(\frac{w}{h}\right)}{d\left(\frac{q b^4}{E h^4}\right)} = \infty \text{ oder } \frac{d\left(\frac{q b^4}{E h^4}\right)}{d\left(\frac{w}{h}\right)} = 0.$$

Die Durchführung der Ableitung ergibt die Durchschlagslast für

$$\frac{w_m}{h} = -\alpha \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{3 \alpha^2 \delta}} \right), \quad (31)$$

(das $+$ -Zeichen vor dem Wurzelzeichen entspricht dem Punkt *d 2*) oder für

$$\frac{q b^4}{E h^4} = -\alpha (1 - \psi) [\gamma + \delta \alpha^2 \psi (1 + \psi)], \quad (32)$$

wo

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{3 \alpha^2 \delta}}. \quad (33)$$

Für den Punkt d 2 wird

$$\frac{q b^4}{E h^4} = -\alpha (1 + \psi) [\gamma - \delta \alpha^2 \psi (1 - \psi)].$$

Wie aus Gl. (31) hervorgeht, ist der Durchschlag nur möglich, wenn

$$|\alpha| > \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}. \quad (34)$$

Es ist von Interesse, die Initialdeformation zu kennen, bei der der Durchschlag nur einen Übergang zu einer unendlich nahe gelegenen Gleichgewichtslage darstellt.

Dies geschieht, wenn die Kurve, die die Beziehung zwischen $\frac{q b^4}{E h^4}$ und $\frac{w_m}{h}$ angibt, einen Inflexionspunkt hat, der mit dem Punkt zusammenfällt, für den $\frac{d \frac{q b^4}{E h^4}}{d \frac{w_m}{h}} = 0$,

$$\frac{d^2 \left(\frac{q b^4}{E h^4} \right)}{d \left(\frac{w_m}{h} \right)^2} = 0 \quad \text{gibt} \quad \frac{w_m}{h} = -\alpha.$$

Da dieser Wert $\frac{w_m}{h}$ gleich sein soll mit dem Wert nach Gl. (31), erhält man

$$\frac{w_m}{h} = -\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \quad (35)$$

und

$$\frac{q b^4}{E h^4} = \gamma \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}. \quad (36)$$

Die Kurve E in Abb. 4 mit vertikaler Tangente in K und $\alpha = -\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ entspricht diesem Falle.

Aus den Gl. (32) bis (36) geht hervor, daß die Durchschlagslast bestimmt wird durch die Größe $\alpha \left(= \frac{W_m}{h} \right)$, welche die Größe der Initialdeformation in der Mitte gibt, sowie durch die Größen γ und δ , die die Beziehung zwischen Belastung und Durchbiegung in der Mitte der Platte bei initial ebener Platte bestimmen. Diese Größen sind somit von ausschlaggebender Bedeutung für die Durchschlagslast.

Es soll hier daran erinnert werden, daß der Behandlung zwei vereinfachende Voraussetzungen zugrunde gelegt wurden, nämlich

1. die initiale Wölbung ist so gewählt, daß sie zur Zusatzdurchbiegung affin ist;
2. die Beziehung zwischen $\frac{w_{0m}}{h_0}$ und $\frac{q b^4}{E h_0^4}$ ist nach Gl. (26) näherungsweise festgesetzt worden.

Da die Zusatzdurchbiegung relativ unempfindlich gegen kleinere Veränderungen in der Form der initialen Aufwärtswölbung ist und da die Gl. (26) offensichtlich die Beziehung zwischen $\frac{w_{0m}}{h_0}$ und $\frac{q b^4}{E h_0^4}$ mit guter Annäherung wiedergibt, kann der Fehler in der Durchschlagslast nicht groß sein, vorausgesetzt, daß die Initialdeformation nicht grundsätzlich von der Form der Zusatzdurchbiegung abweicht.

IV. Spannungen bei der initial deformierten Platte.

In ⁶ hat der Verfasser gezeigt, wie die Spannungen bei initialer Deformation berechnet werden können. Da die Berechnung der Spannungen nicht in den Rahmen des vorliegenden Aufsatzes gehört, gehen wir nicht näher darauf ein. In ⁶ wurden in einem Beispiel die Membranspannungen berechnet, die in der Mitte einer initial

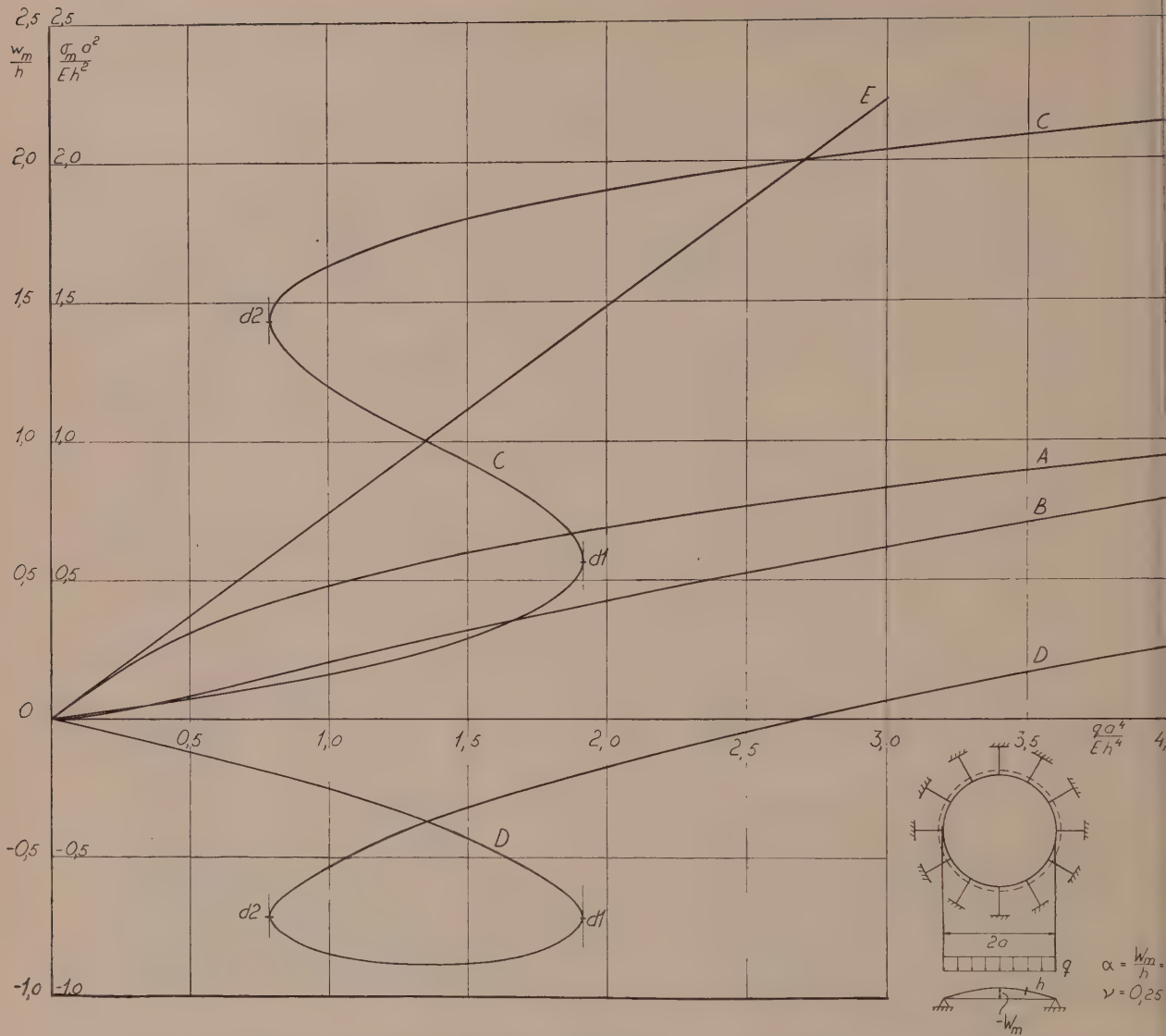


Abb. 5. Zusatzdurchbiegung in der Plattenmitte $\frac{w_m}{h}$ und Membranspannung in der Plattenmitte σ_m bei initial ebener und initial aufwärtsgewölbter kreisrunder Platte, gelenkig und unverschiebbar gelagert. Die initiale Aufwärtsgbiegung in der Mitte $= W_m = h \cdot \alpha$. A = Zusatzdurchbiegung in der Plattenmitte $\frac{w_0}{h}$ bei initial ebener Platte. B = Membranspannung in der Plattenmitte $\frac{\sigma_{m0} a^2}{E h^2}$ bei initial ebener Platte. C = Zusatzdurchbiegung in der Plattenmitte $\frac{w_m}{h}$ bei initial aufwärtsgewölbter Platte. D = Membranspannung in der Plattenmitte $\frac{\sigma_m a^2}{E h^2}$ bei initial aufwärtsgewölbter Platte. E = Zusatzdurchbiegung in der Plattenmitte nach der linearen Theorie $\left(\frac{w_m}{h}\right)$. Die Kurven A und B geben Ergebnisse von Federhofer und Egger wieder, die vom Verfasser durch folgende Funktionen approximiert wurden:

$$\frac{q_0 a^4}{E h_0^4} = \frac{1}{16} \frac{w_0}{h_0} \left[21.7 + 52 \left(\frac{w_0}{h_0} \right)^2 \right], \quad (\text{Kurve A}) \quad (a)$$

$$\frac{\sigma_{m0} a^2}{E h_0^2} = 0.89 \left(\frac{w_0}{h_0} \right)^2. \quad (\text{Kurve B}) \quad (b)$$

aufwärtsgebogenen, kreisrunden, gelenkig und unverschiebbar gelagerten Platte auftreten (Auflagefall 8 in Abschnitt V). Die initiale Aufwärtswölbung in der Mitte war gleich der Plattendicke ($\alpha = -1$). Durch eine falsche Deutung der Werte der initial ebenen Platte wurde die Kurve für die Membranspannung bei der initial deformierten Platte für kleine Werte von $\frac{q_0 a^4}{E h_0^4}$ unrichtig. Die korrigierte Kurve zeigt nun Abb. 5. Vgl. Fig. 15, Beispiel 4b, in ⁶.

V. Verschiedene Auflagefälle.

In Abb. 6 sind einige verschiedene Auflagefälle wiedergegeben, für welche die Koeffizienten γ und δ nach den in der Literatur gegebenen Lösungen für die initial

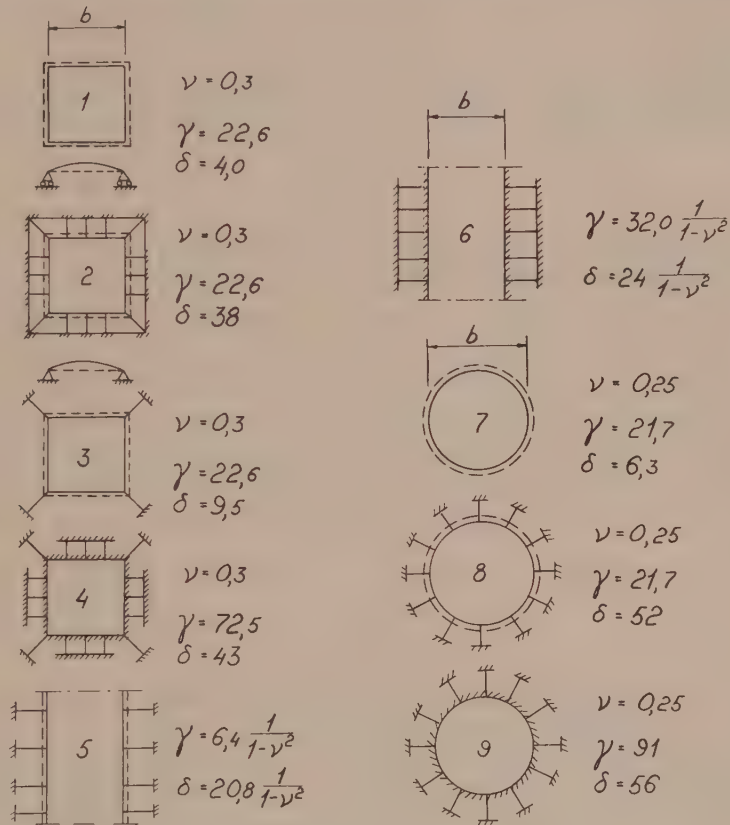


Abb. 6. Verschiedene Belastungsfälle.

Nach Gl. (30) und der im Aufsatz⁶ des Verfassers angegebenen Methode kann man, ausgehend von diesen Ausdrücken, folgende Beziehungen für die initial aufwärtsgewölbte Platte ableiten:

$$\frac{q a^4}{E h^4} = \frac{w_m}{h} \left\{ 21,7 + 52 \left[2 \alpha^2 + 3 \alpha \frac{w_m}{h} + \left(\frac{w_m}{h} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{Kurve } C) \quad (c)$$

$$\frac{\sigma_m a^2}{E h^2} = 0,89 \left[\left(\frac{w_m}{h} \right)^2 + 2 \alpha \frac{w_m}{h} \right]. \quad (\text{Kurve } D) \quad (d)$$

Es ist zu beachten, daß die Kurven *C* und *D* nach dem Durchschlag in Punkt *d* 1 nur unter konstruierten Voraussetzungen reelle Bedeutung haben.

ebene Platte berechnet wurden. Folgende Einzelheiten gelten für die verschiedenen Auflagefälle:

Auflagefall 1. Quadratische Platte. Plattenränder gelenkig und in der Platten-ebene verschiebbar gelagert. Gleichmäßig verteilte Last. Poissonsche Zahl $\nu = 0.3$.

Die initial ebene Platte ist von Kaiser¹² behandelt worden. Die Grenzbedingungen sind:

1. $w = 0$ längs der Auflage.
2. Das Bieugungsmoment \perp Auflage $= 0$.
3. Die Normalspannungen \perp Auflage $= 0$.

Sind diese Bedingungen für die initial ebene Platte erfüllt, so sind die Bedingungen 1 und 2 auch für die initial deformierte Platte erfüllt als Folge von Gl. (21). (Die Platten-Biegemomente sind Funktionen von w_0 bzw. w .)

Die Bedingung 3 ist als Folge von Gl. (22) erfüllt.

Aus Kaisers theoretischen und experimentellen Ergebnissen erhält man:

$$\gamma = 22.6$$

und

$$\delta = 4.0.$$

Auflagefall 2. Quadratische Platte. Plattenränder gelenkig, aber unverschiebbar gelagert. Gleichmäßig verteilte Belastung. $\nu = 0.3$.

Die initial ebene Platte wurde von Levy^{13,14} und Prescott¹⁵ behandelt und von Eggwertz und Norr¹⁶ diskutiert.

Die Grenzbedingungen 1 und 2 sind dieselben wie für den Auflagefall 1.

Die dritte Grenzbedingung ist, daß die Verschiebungen u und v längs der Auflage gleich Null sind. Wenn diese Grenzbedingungen für die initial ebene Platte erfüllt sind, so sind sie das als Folge der Gl. (24) und (25) auch für die initial deformierte Platte. Aus dem Ergebnis von Levy und Prescott erhält man (bestimmt für

$$\frac{w_{0m}}{h} = 1.8)$$

$$\gamma = 22.6,$$

$$\delta = 38.$$

Auflagefall 3. Quadratische Platte. Plattenränder gelenkig gelagert, die Ecken unverschiebbar. Gleichmäßig verteilte Belastung. $\nu = 0.3$.

Die initial ebene Platte wurde von Eggwertz und Norr¹⁶ nach einer Näherungsmethode behandelt.

Die Grenzbedingungen 1 und 2 sind dieselben wie für Auflagefall 1.

Die Grenzbedingung 3 besteht darin, daß längs der Auflagekante $x = \text{konst.}$ $v = 0$, längs der Kante $y = \text{konst.}$ $u = 0$.

Diese Grenzbedingung ist als Folge von Gl. (24) und (25) auch für die initial deformierte Platte erfüllt, wenn sie es für die initial ebene Platte ist.

¹² R. Kaiser: Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten. Z. angew. Math. Mechan. 73 (1936).

¹³ S. Levy: Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deflections. NACA, Report No 740. 1942.

¹⁴ S. Levy: NACA Report No 737. 1942.

¹⁵ J. Prescott: Applied Elasticity, Chapt. XIII—XV. New York. 1946.

¹⁶ S. Eggwertz und A. Norr: Analysis of Thin Square Plates. The Aer. Res. Inst. of Sweden, Rep. No 50. 1953.

Aus der Lösung von Eggwertz und Norr erhält man

$$\gamma = 22.6.$$

$$\delta = 9.5.$$

Auflagefall 4. Quadratische Platte. Feste Einspannung an den Rändern. Unverschiebbare Stützung. $\nu = 0.3$.

Die initial ebene Platte wurde von Way¹⁷ behandelt.

Die Grenzbedingungen sind:

1. $w = 0$ längs der Auflage.

2. $\frac{dw}{dx} = 0$ längs der Auflagekante $x = \text{konst.}$ $\frac{dw}{dy} = 0$ längs der Auflagekante $y = \text{konst.}$

3. $u = v = 0$ längs der Auflage.

Wenn diese Grenzbedingungen für die initial ebene Platte erfüllt sind, so sind sie es nach Gl. (21) sowie (24) und (25) auch für die initial deformierte Platte.

Ways Lösung ergibt für $\frac{w_{0m}}{h_0} = 1.8$

$$\gamma = 72.5,$$

$$\delta = 43.$$

Auflagefall 5. Entspricht dem Auflagefall 2, aber für eine unendlich langgestreckte Platte.

Nach der Lösung von Timoshenko¹⁸ wird (bei $\frac{w_{0m}}{h_0} = 2.5$)

$$\gamma = 6.4 \frac{1}{1 - \nu^2},$$

$$\delta = 20.8 \frac{1}{1 - \nu^2},$$

$\nu =$ Poissonsche Zahl.

Auflagefall 6. Entspricht dem Auflagefall 4 bei unendlich langgestreckter Platte.

Gemäß der Lösung von Way¹⁷ wird für $\frac{w_{0m}}{h_0} = 1.8$

$$\gamma = 32.0 \frac{1}{1 - \nu^2},$$

$$\delta = 24 \frac{1}{1 - \nu^2}.$$

Auflagefall 7. Kreisrunde Platte. Plattenrand gelenkig und in der Plattenebene verschiebbar gelagert. Gleichmäßig verteilte Last. $\nu = 0.25$.

Die initial ebene Platte ist von Federhofer¹⁹ und von Federhofer-Egger²⁰ behandelt worden.

Die Grenzbedingungen sind:

1. Durchbiegung w und Moment $= 0$ längs der Auflage.

2. Die Normalspannung \perp zur Auflage $= 0$.

Wenn die Grenzbedingungen für die initial ebene Platte erfüllt sind, so sind sie es nach Gl. (15) und (16) auch für die initial deformierte Platte.

¹⁷ S. Way: Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass. 1938.

¹⁸ S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells, S. 4. New York and London. 1940.

¹⁹ K. Federhofer: Luftfahrt-Forsch. 21 (1944).

²⁰ K. Federhofer und H. Egger: Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. S.-B. Akad. Wiss. Wien, H. 1 und 2 (1946).

Aus Federhofer-Eggers Lösung erhält man für $\frac{w_{0m}}{h_0} = 4$

$$\gamma = 21.7,$$

$$\delta = 6.3.$$

Auflagefall 8. Kreisrunde Platte. Plattenrand gelenkig gelagert, aber unverschiebbar. Gleichmäßig verteilte Belastung. $\nu = 0.25$.

Die Lösung für die initial ebene Platte stammt von Federhofer-Egger. Die Grenzbedingung $u_r = 0$ für $r = \frac{1}{2}b$ ist für die initial deformierte Platte nach Gl. (20) befriedigt. Mit dem Wert $\frac{w_{0m}}{h_0} = 4.5$ erhält man

$$\gamma = 21.7,$$

$$\delta = 52.$$

Auflagefall 9. Kreisrunde Platte. Plattenrand fest eingespannt und unverschiebbar.

Lösungen für die initial ebene Platte wurden angegeben von Nádai⁸, Way²¹ und von Federhofer¹⁹.

Aus Federhofers Lösung erhält man für $\frac{w_{0m}}{h_0} = 5.1$

$$\gamma = 91,$$

$$\delta = 56.$$

Wenn γ und δ bestimmt sind, erhält man die Durchschlagslast aus den Gl. (32) und (33).

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Methode zur Bestimmung der Durchschlagslast auch für andere Belastungsfälle, wie z. B. Belastung mit Punktlast, dieselbe bleibt.

(Eingegangen am 22. April 1955.)

Membranspannungen in der schiefen Kreiskegelschale.

Von H. Parkus, East Lansing, Michigan.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Gleichungen des Membranspannungszustandes in der schiefen Kreiskegelschale werden durch Spezialisierung der vom Verfasser angegebenen allgemeinen Schalengleichungen hergeleitet.

Summary. The equations of the membrane state of stress in oblique circular conical shells are derived by specializing the general equations of shells as given by the author.

Résumé. Les équations de l'état de contrainte d'une membrane dans la coque oblique d'un cône circulaire, sont déduites en spécialisant la théorie générale de l'auteur sur les coques.

Aus den vom Verfasser angegebenen allgemeinen Gleichungen der dünnen Schale¹ werden im nachstehenden durch Spezialisierung die Gleichungen des Membranspannungszustandes der schiefen Kreiskegelschale hergeleitet. Zum Verständnis der

²¹ S. Way: Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. **56**, 627 (1934).

¹ H. Parkus: Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten. Österr. Ingenieur-Arch. **4**, 160 (1950); **6**, 30 (1951). Zur Berechnung von Gewölbestaumauern als Schalen. Z. angew. Math. Mech. **31**, 278 (1951).

Ableitungen sind einige Kenntnisse in der Differentialgeometrie und Tensorrechnung notwendig, die Ergebnisse, Gln. (17) bis (19), können aber unabhängig davon unmittelbar angewendet werden.

Geometrische Beziehungen.

Die Mittelfläche der Schale ist in Abb. 1 angedeutet. $x_1, x_2, x_3 \equiv z$ sind rechtwinklige kartesische Koordinaten im Raum, mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Basiskreises, und $q_1 = \varphi, q_2 = z$ sind Koordinaten in der Schalenmittelfläche. Die Koordinatenlinien sind dann die Erzeugenden $\varphi = \text{konst.}$ und die Kreise $z = \text{konst.}$ Sie schneiden einander im allgemeinen nicht unter rechten Winkeln, es liegt also ein schiefwinkliges Koordinatensystem vor.

Man entnimmt der Abbildung, daß der Radius der Kreise $z = \text{konst.}$ durch

$$r = \alpha (h - z) \quad (1)$$

gegeben ist. z ist der Abstand von der Basis, h ist die Höhe des Kegels und αh ist der Radius der Basis. Als Kegelachse definieren wir die Gerade, welche die Mittelpunkte der Kreise $z = \text{konst.}$ verbindet. Ihre Gleichung ist

$$x_1 = \beta z, \quad x_2 = 0. \quad (2)$$

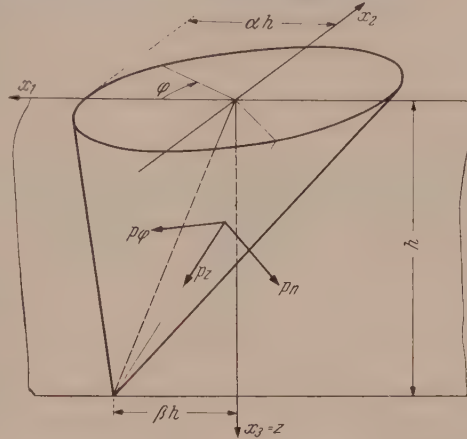


Abb. 1.

α und β sind gegebene dimensionslose Konstanten. $\beta = 0$ entspricht dem geraden Kreiskegel.

Die Parametergleichungen des Kegels sind

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi + \beta z = \alpha (h - z) \cos \varphi + \beta z, \\ x_2 &= r \sin \varphi = \alpha (h - z) \sin \varphi, \\ x_3 &= z. \end{aligned} \quad (3)$$

Die geometrischen Eigenschaften der Schalenmittelfläche sind festgelegt durch den Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ und den Haupttensor $b_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) gemäß

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q^\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = - \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q^\beta} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei ζ_i der Normalenvektor der Fläche ist. Nach Einsetzen der Gln. (3) erhält man

$$g_{11} = r^2, \quad g_{12} = g_{21} = -r\beta \sin \varphi, \quad g_{22} = 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi, \quad (4)$$

$$b_{11} = \frac{-r}{(1 + \lambda^2)^{1/2}}, \quad b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0. \quad (5)$$

Hierbei wurde zur Abkürzung

$$\lambda = \beta \cos \varphi - \alpha \quad (6)$$

gesetzt.

Die Christoffel-Symbole spezialisieren sich im vorliegenden Fall zu

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\beta \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \sin \varphi, & \Gamma_{11}^2 &= -r \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{-\alpha}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Gleichgewichtsbeziehungen.

Zur Aufstellung der Formeln des Membranspannungszustandes ist in den allgemeinen Schalengleichungen die Biegesteifigkeit Null zu setzen. Neben dem Verschwinden der Momente und Querkräfte hat dies zur Folge, daß der „Krafttensor“ $\eta_{\alpha\beta}$ symmetrisch wird, $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$. Bei nichtverschwindender Biegesteifigkeit ist ein Membranspannungszustand im allgemeinen nur näherungsweise möglich. Die Symmetrie des Krafttensors ist dann gleichfalls nur näherungsweise richtig.

Die drei Gleichgewichtsbeziehungen lauten bei verschwindender Biegesteifigkeit

$$\frac{D\eta^{\alpha\beta}}{Dq^\alpha} + p^\beta = 0, \quad (8)$$

$$b_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} + p_3 = 0. \quad (9)$$

Der Operator D/Dq^α stellt die kovariante Ableitung in der Schalenmittelfläche dar.

Unter Benützung der Gl. (5) und (7) können die Gleichgewichtsbedingungen (8) und (9) in entwickelter Form² geschrieben werden,

$$\frac{\partial \eta^{(11)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta^{(12)}}{\partial z} + 2\lambda\lambda' \frac{\eta^{(11)}}{\psi^2} - \frac{3}{r} \alpha \eta^{(12)} + p^{(1)} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta^{(12)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta^{(22)}}{\partial z} - \frac{r}{\psi^2} \lambda \eta^{(11)} + \frac{\lambda}{\psi^2} \lambda' \eta^{(12)} - \frac{\alpha}{r} \eta^{(22)} + p^{(2)} = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{r}{\psi} \eta^{(11)} + p_3 = 0, \quad (12)$$

λ' ist die Ableitung von λ nach φ ,

$$\lambda' = -\beta \sin \varphi \quad (13)$$

und die Größen ψ und ω sind wie folgt definierte Abkürzungen

$$\psi = \sqrt{1 + \lambda^2}, \quad \omega = \sqrt{1 + \lambda^2 + (\lambda')^2} = \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi}. \quad (14)$$

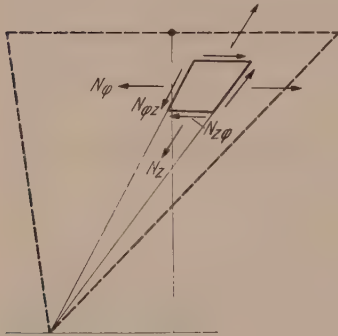


Abb. 2.

Der Zusammenhang zwischen dem Tensor $\eta^{\alpha\beta}$ und den kontravarianten Komponenten P^α der Schnittkräfte pro Längeneinheit eines Normalschnittes entlang einer Kurve C in der Mittelfläche ist gegeben durch

$$P^\alpha = \eta^{\alpha\beta} v_\beta.$$

v_β ist der Einheitsvektor in der Mittelfläche, senkrecht zu C . Betrachtet man insbesondere Schnitte entlang den Koordinatenlinien $q_1 = \varphi = \text{konst.}$ und $q_2 = z = \text{konst.}$, dann gilt für die zugehörigen Schnittkraftkomponenten

$$\left. \begin{aligned} {}_{(1)}P^{(1)} &= r \frac{\psi}{\omega} \eta^{(11)}, & {}_{(1)}P^{(2)} &= r \frac{\psi}{\omega} \eta^{(12)}, \\ {}_{(2)}P^{(1)} &= \psi \eta^{(21)}, & {}_{(2)}P^{(2)} &= \psi \eta^{(22)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Für praktische Zwecke ist es im allgemeinen bequemer, die euklidischen Komponenten der Schnittkräfte zu benutzen. Diese lauten im vorliegenden Fall, s. Abb. 2,

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= {}_{(1)}N^{(1)} = \sqrt{g_{11}} {}_{(1)}P^{(1)} = r^2 \frac{\psi}{\omega} \eta^{(11)}, \\ N_{\varphi z} &= N_{z\varphi} = {}_{(1)}N^{(2)} = {}_{(2)}N^{(1)} = \sqrt{g_{22}} {}_{(1)}P^{(2)} = \sqrt{g_{11}} {}_{(2)}P^{(1)} = r \psi \eta^{(12)}, \\ N_z &= {}_{(2)}N^{(2)} = \sqrt{g_{22}} {}_{(2)}P^{(2)} = \omega \psi \eta^{(22)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

² Obere Indizes werden von hier an in Klammern gesetzt, um eine Verwechslung mit Exponenten zu vermeiden.

Setzt man nun die Gl. (16) in die Gl. (10), (11) und (12) ein und benützt man euklidische Komponenten auch für die längs der Mittelfläche verteilten Lasten,

$$p_\varphi = \sqrt{g_{11}} p^{(1)} = r p^{(1)}, \quad p_z = \sqrt{g_{22}} p^{(2)} = \omega p^{(2)}, \quad p_n = p_3,$$

dann erhält man die folgenden drei Gleichungen für die drei Komponenten der Schnittkräfte

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial N_{\varphi z}}{\partial z} + \lambda' \left(\lambda \frac{\omega}{\psi^2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) N_\varphi - 2 \alpha N_{\varphi z} &= -r \psi p_\varphi, \\ \omega \frac{\partial N_{\varphi z}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial N_z}{\partial z} - \lambda \frac{\omega^2}{\psi^2} N_\varphi - \alpha N_z &= -r \psi p_z, \\ N_\varphi &= r \frac{\psi^2}{\omega} p_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Gl. (17) kann nunmehr in die ersten zwei Gleichungen eingesetzt werden. Dies ergibt

$$r \frac{\partial N_{\varphi z}}{\partial z} - 2 \alpha N_{\varphi z} = -r \left(\psi p_\varphi + \psi^2 \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} + 3 \lambda \lambda' p_n \right), \quad (18)$$

$$r \frac{\partial N_z}{\partial z} - \alpha N_z = r \lambda \omega p_n - r \psi p_z - \omega \frac{\partial N_{\varphi z}}{\partial \varphi}. \quad (19)$$

Mit den drei Gl. (17), (18) und (19) sind die drei Gleichungen für die Membrankräfte in der Kegelschale aufgestellt. Sie sind unter Benutzung der vorgegebenen Werte p_φ , p_z und p_n für die Komponenten der verteilten Lasten pro Einheit der Mittelfläche zu lösen. Die gleichfalls vorgegebenen geometrischen Größen r , λ , ψ , ω sind dabei durch die Gl. (1), (6) und (14) definiert.

(Eingegangen am 5. April 1955.)

Die orthotrope Platte mit Hohlsteifen.

Von A. Pflüger, Hannover.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird eine Rechteckplatte konstanter Dicke betrachtet, die in einer Richtung eine Schar Versteifungen trägt, von denen jede zusammen mit der Platte einen geschlossenen torsionsfesten Hohlquerschnitt bildet. Für die so entstandene orthotrope Platte werden die Differentialgleichungen aufgestellt und ihre Lösungsmöglichkeiten besprochen. Die Theorie wird durch Messungen an einem Modell bestätigt.

Summary. The author considers a rectangular plate of constant thickness bearing in one direction a series of reinforcements each of which together with the plate forms a closed torsion-resistant hollow cross-section. For the orthotropic plate thus obtained the differential equations are established, and their possible solutions discussed. The theory is verified by measurements carried out on a model.

Résumé. On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur constante, portant dans une direction une série de renforcements dont chacun forme avec la plaque une section creuse, fermée et résistant à la torsion. On établit les équations différentielles pour la plaque orthotrope ainsi obtenue, et l'on traite des différentes solutions possibles. Des mesures faites sur un modèle confirment la théorie.

I. Aufgabenstellung.

Platten mit dicht liegenden Versteifungen, die mit guter Näherung als orthotrope Platten berechnet werden können, sind ein viel verwendetes Konstruktionselement des Stahlbaus, insbesondere des Stahlbrückenbaus geworden. Für die Versteifungen kommen dabei die verschiedensten Querschnittsformen in Betracht. Unter anderem

liegt es auch nahe, nach Abb. 1 das Versteifungsprofil so zu wählen, daß es zusammen mit der Platte einen geschlossenen Hohlquerschnitt bildet. Da bekanntlich Stäbe mit Hohlquerschnitt sehr verdrehsteif sind, wird durch ihre Verwendung auch die Steifigkeit der orthotropen Platte entsprechend vergrößert. Im folgenden wird die für derartige Versteifungen notwendige Theorie entwickelt und ihr Resultat durch Messungen an einem Modell bestätigt.

Im einzelnen sei vorausgesetzt, daß es sich um ein rechteckiges orthotropes Plattenfeld handelt. Es möge aus einer homogenen isotropen Platte konstanter Dicke bestehen, die auf ihrer Unterseite parallel zu zwei gegenüberliegenden Plattenseiten eine Schar einander paralleler und unter sich gleicher Versteifungen trägt, deren gegenseitiger Abstand konstant ist. Das Versteifungsprofil sei beliebig. Der gebildete Hohlquerschnitt sei jedoch einzellig und die Wandstärke der Versteifungen konstant. Eine Erweiterung der im folgenden aufgestellten Formeln für beliebigen Wandstärkenverlauf bereitet keine Schwierigkeiten.

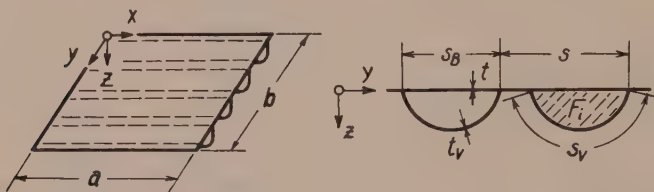


Abb. 1a, b. Orthotrope Platte mit Hohlsteifen.

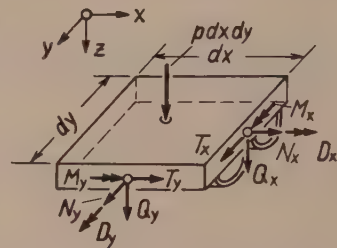


Abb. 2. Schnittgrößen und Belastung am Element der orthotropen Platte.

II. Bezeichnungen.

Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. Abb. 1 und 2):

- x, y, z rechtwinklige Koordinaten, wobei die x, y -Ebene mit der Mittelfläche der isotropen Platte zusammenfällt und die x -Richtung parallel zu den Versteifungen liegt,
- $$\frac{\partial(\dots)}{\partial x} = (\dots)', \quad \frac{\partial(\dots)}{\partial y} = (\dots)'',$$
- a, b Seitenlängen der Platte,
 t Dicke der isotropen Platte,
 t_v Wandstärke der Versteifungen,
 F Querschnittsfläche einer Versteifung,
 S, I statisches Moment bzw. axiales Trägheitsmoment eines Versteifungsquerschnitts in bezug auf die Mittelfläche der isotropen Platte,
 F_i Fläche des Hohlquerschnitts einer Versteifung,
 I_D Drillträgheitsmoment einer Versteifung,
 s_B, s_v, s Längenabmessungen nach Abb. 1b zur Kennzeichnung der Versteifungen und ihres gegenseitigen Abstandes,
 E Elastizitätsmodul,
 μ Querkontraktionszahl,
 u, v, w Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche der isotropen Platte in Richtung der Achsen x, y, z ,
 N_i, T_i, Q_i, M_i, D_i ($i = x, y$) Schnittgrößen am Element der orthotropen Platte nach Abb. 2 bezogen auf die Mittelfläche der isotropen Platte,
 T_v Schubfluß im Versteifungsprofil,
 p Belastung je Einheit der Mittelfläche der isotropen Platte.

Außerdem seien folgende dimensionslose Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t + \frac{F}{s}}{a}, & \varrho &= \frac{t}{t + \frac{F}{s}}, & \omega &= \frac{t + (1 - \mu^2) \frac{F}{s}}{t + \frac{F}{s}}, & \varphi &= \frac{\frac{S}{s}}{\left(t + \frac{F}{s}\right)^2}, \\ \lambda &= \frac{t^3 + 12(1 - \mu^2) \frac{I}{s}}{\left(t + \frac{F}{s}\right)^3}, & \xi_1 &= \frac{s_B t_V + s_V t}{s_B t_V \left(1 + \frac{s_B}{s}\right) + s_V t}, & \xi_2 &= \frac{s_B t_V}{s_B t_V \left(1 + \frac{s_B}{s}\right) + s_V t}, \\ \psi_1 &= \frac{I_D}{2 F_i} \frac{\frac{s_B}{s}}{\left(t + \frac{F}{s}\right)^2}, & \psi_2 &= \frac{F_i}{s \left(t + \frac{F}{s}\right)}, & \bar{p} &= \frac{p}{E} \frac{1 - \mu^2}{t + \frac{F}{s}} \frac{1}{\tau a}.\end{aligned}$$

III. Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen.

Für den Verformungszustand sollen die bei dünnen Platten üblichen Voraussetzungen gelten, insbesondere die Annahme vom „Geradebleiben der Normalen“ zur Mittelfläche. Daraus wird für die Versteifungen, die als biegezugsfeste Stäbe aufzufassen sind, die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte. Schließt man eine Nachgiebigkeit der Schubverbindung zwischen der isotropen Platte und den Versteifungen aus, so können die Dehnungen an jeder Stelle auf Grund der genannten Annahme durch die Ableitungen der Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche der isotropen Platte ausgedrückt werden. Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes, bei dessen Ansatz in der isotropen Platte σ_x und σ_y , in den Versteifungen nur σ_x berücksichtigt werden, ergibt sich dann für die Längskräfte und Biegemomente der folgende Zusammenhang mit den Verschiebungsableitungen¹.

$$\left. \begin{aligned}N_x &= \frac{E t}{1 - \mu^2} (u' + \mu v') + E \left(\frac{F}{s} u' - \frac{S}{s} w'' \right), \\ N_y &= \frac{E t}{1 - \mu^2} (v' + \mu u'), \\ M_x &= - \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)} (w'' + \mu w'') + E \left(\frac{S}{s} u' - \frac{I}{s} w'' \right), \\ M_y &= \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)} (w'' + \mu w'').\end{aligned} \right\} \quad (1a-d)$$

Zur Aufstellung des Elastizitätsgesetzes für die Schubkräfte und Drillmomente sind weitere Annahmen erforderlich. Am einfachsten liegen die Dinge beim Drillmoment D_y . Hier genügt die Annahme, daß sich die in x -Richtung laufenden Versteifungen an der Aufnahme des Drillmomentes nicht beteiligen, so daß die isotrope Platte alles allein aufnimmt. Es gilt dann

$$D_y = - \frac{E t^3}{12 (1 + \mu)} w'. \quad (2)$$

Den gleichen Anteil — jedoch der Vorzeichendefinition von Abb. 2 entsprechend mit positivem Vorzeichen — liefert die isotrope Platte auch für D_x . Dieser Anteil sei

$$D_{x_1} = \frac{E t^3}{12 (1 + \mu)} w'. \quad (3)$$

Außerdem ist aber zur Ermittlung von D_x die Verdrehbeanspruchung der Versteifungen zu berücksichtigen. Dazu sei angenommen, daß das Versteifungsprofil

¹ Eine ausführliche Ableitung dieser Beziehungen findet sich bei A. Pflüger: Ingenieur-Arch. 16, 111 (1947).

zusammen mit dem Abschnitt s_B der isotropen Platte (vgl. Abb. 1 b) einen Torsionsstab mit dünnwandigem Hohlquerschnitt darstellt, in dem bei Verdrehbeanspruchung ein konstanter Schubfluß entsteht. Damit wird nur die Saint-Venantsche Verdrehsteifigkeit berücksichtigt und die Auswirkung einer Behinderung der Querschnittsverwölbung vernachlässigt. Mit dieser Annahme befindet man sich für die Abschätzung der Verdrehsteifigkeit zweifellos auf der sicheren Seite und ist der Wirklichkeit vermutlich wesentlich näher, als wenn man auch für die Torsionsbeanspruchung ein Ebenbleiben der Querschnitte voraussetzen, die Verwölbung also ausschließen würde. Es ergibt sich dann als zweiter Beitrag zu D_x

$$D_{x_2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{I_D}{s} w'.$$
 (4)



Abb. 3. Statisch unbestimmte Schubflußverteilung in den Versteifungen.

Als Drillwinkel der Versteifungen ist dabei mit Rücksicht auf ihre Verbindung mit der Platte die Verwindung w' eingesetzt. Für das Drillträgheitsmoment I_D gilt mit den Bezeichnungen von Abb. 1 b die Beziehung

$$I_D = \frac{4 F_i^2}{\frac{s_B}{t} + \frac{s_V}{t_V}} = 4 F_i^2 \frac{t t_V}{s_B t_V + s_V t}.$$
 (5)

Da D_x definitionsgemäß das Drillmoment in bezug auf eine Achse sein soll, die in der Mittelfläche der isotropen Platte liegt, ist noch ein dritter Beitrag D_{x_3} zu berücksichtigen, der sich dadurch ergibt, daß die Resultierende aller in y -Richtung verlaufenden Schubspannungen in einem gewissen Abstand von der Mittelfläche der isotropen Platte angreift. Zur Ermittlung von D_{x_3} ist zunächst eine nähere Betrachtung der Schubübertragung notwendig.

Diese ist, wie in Abb. 3 angedeutet, dadurch einfach statisch unbestimmt, daß in jedem Versteifungsprofil ein konstanter Schubfluß auftreten kann, der mit X_a bezeichnet sei. Zwischen den Versteifungen herrscht in der isotropen Platte der Schubfluß T_x des statisch bestimmten Hauptsystems. Nach bekannten Gesetzen ist

$$X_a = \frac{\frac{s_B}{t}}{\frac{s_B}{t} + \frac{s_V}{t_V}} T_x.$$
 (6)

Nach Kenntnis von X_a ergibt sich dann unter Berücksichtigung der in den Abb. 2 und 3 enthaltenen Vorzeichendefinitionen

$$D_{x_3} = -2 F_i \frac{X_a}{s} = -\frac{2 F_i}{s} \frac{s_B t_V}{s_B t_V + s_V t} T_x.$$
 (7)

Um D_{x_3} durch die u, v, w ausdrücken zu können, muß als Nächstes das Elastizitätsgesetz für T_x aufgestellt werden.

Hierzu wird die Schubverzerrung $u' + v'$ der Mittelfläche der isotropen Platte betrachtet und angenommen, daß sie einem mittleren Schubfluß T_m proportional ist, der sich ergibt, wenn man die in der isotropen Platte wirkenden Schubkräfte über die Länge dx des Plattenelementes summiert und die Summe dann wieder gleichmäßig über dx verteilt. Es sei also

$$T_m = \frac{E t}{2(1+\mu)} (u' + v').$$
 (8)

Der im Versteifungsprofil, das heißt im Bereich von der Länge s_V , bei Schub- und Torsionsbeanspruchung herrschende Schubfluß sei mit T_V bezeichnet (X_a war der Schubfluß in der Versteifung für reine Schubbeanspruchung, das heißt für $w' = 0$).

Der in der isotropen Platte im Versteifungsbereich von der Länge s_B wirkende Schubfluß ist dann $T_x - T_V$. Da sich der Schubfluß T_x zwischen den Versteifungen über die Länge $s - s_B$ erstreckt, ergibt sich für T_m die Gleichung

$$T_m s = (T_x - T_V) s_B + T_x (s - s_B),$$

also

$$T_m = T_x - T_V \frac{s_B}{s}. \quad (9)$$

Für T_V gilt unter Beachtung der Vorzeichendefinition von D_{x_2} und X_a

$$T_V = \frac{D_{x_2} s}{2 F_i} - X_a$$

und mit (4) und (6)

$$T_V = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{I_D}{2 F_i} w' - \frac{s_B t_V}{s_B t_V + s_V t} T_x. \quad (10)$$

Setzt man (10) in (9) und (9) in (8) ein und löst nach T_x auf, so folgt

$$T_x = \frac{E t}{2(1+\mu)} \xi_1 (u' + v') + \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{I_D}{2 F_i} \frac{s_B}{s} \xi_1 w'. \quad (11)$$

mit der bereits in Abschnitt 2 eingeführten Abkürzung

$$\xi_1 = \frac{s_B t_V + s_V t}{s_B t_V \left(1 + \frac{s_B}{s}\right) + s_V t}.$$

Dasselbe Elastizitätsgesetz gilt auch für T_y , da für das Element nach Abb. 2 aus der Momentengleichgewichtsbedingung um eine Parallele zur z -Achse $T_x = T_y$ folgt.

Mit (11) kann nun auch der aus (7) folgende Drillmomentenbeitrag D_{x_3} und damit weiter unter Benutzung von (3) und (4) das Drillmoment

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2} + D_{x_3}$$

in der endgültigen Form angegeben werden. Man erhält nach passender Zusammenfassung der einzelnen Glieder

$$D_x = \frac{E t^3}{12(1+\mu)} w' + \frac{E t}{2(1+\mu)} \left[\frac{I_D}{s t} \xi_1 w' - \frac{2 F_i}{s} \xi_2 (u' + v') \right] \quad (12)$$

mit der weiteren Abkürzung

$$\xi_2 = \frac{s_B t_V}{s_B t_V \left(1 + \frac{s_B}{s}\right) + s_V t}.$$

Damit ist das gesamte Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen nunmehr gefunden; es wird durch die Gl. (1a–d), (2), (11) und (12) dargestellt.

IV. Gleichgewichtsbedingungen und Differentialgleichungen.

Die sechs Gleichgewichtsbedingungen für die am Plattenelement angreifenden Schnittgrößen lauten nach Abb. 2

$$\left. \begin{aligned} N_x' + T_y' &= 0, & D_x' + M_y' + Q_y &= 0, \\ N_y' + T_x' &= 0, & D_y' + M_x' - Q_x &= 0, \\ Q_x' + Q_y' + p &= 0, & T_x - T_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13a-f)$$

Auf (13f) war bereits oben hingewiesen worden. Nach Elimination der Querkräfte Q_x und Q_y erhält man aus (13c, d, e) die Gleichung

$$D_y' + M_x'' - D_x' - M_y'' + p = 0. \quad (14)$$

Führt man in (13a, b) und (14) das im vorigen Abschnitt für die Schnittgrößen aufgestellte Elastizitätsgesetz ein, so ergeben sich unter Benutzung der in Abschnitt 2 angegebenen dimensionslosen Abkürzungen die folgenden Differentialgleichungen für die u, v, w .

$$\left. \begin{aligned} \omega u'' + \frac{1-\mu}{2} \varrho \xi_1 u'' + \varrho \left(\mu + \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \right) v' - (1-\mu^2) \varphi \tau a w''' + \\ + \frac{1-\mu}{2} \psi_1 \xi_1 \tau a w'' = 0, \\ \varrho v'' + \frac{1-\mu}{2} \varrho \xi_1 v'' + \varrho \left(\mu + \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \right) u' + \frac{1-\mu}{2} \psi_1 \xi_1 \tau a w'' = 0, \\ (1-\mu^2) \varphi u''' - \frac{\tau a}{12} (\lambda w'''' + 2 \varrho^3 w''' + \varrho^3 w'') + \\ + (1-\mu) \varrho \psi_2 \xi_2 (u'' + v'') - (1-\mu) \psi_1 \psi_2 \xi_1 \frac{s}{s_B} \tau a w'' + \bar{p} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15a, b, c)$$

V. Zur Lösung der Differentialgleichungen.

Es seien lediglich zwei praktisch wichtige Beispiele betrachtet.

a) Allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte.

Für eine Rechteckplatte, die längs ihrer Ränder die sog. Navierschen Randbedingungen aufweist, wird eine Lösung möglich, wenn sich die Belastung durch eine Fouriersche Doppelreihe von der Form

$$\bar{p} = \sum_n \sum_m c_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y, \quad (16)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

darstellen läßt. Die Differentialgleichungen werden nämlich dann für eine beliebige Harmonische mit dem Index mn durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u &= A_{mn} \cos m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y, \\ v &= B_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \cos n \frac{\pi}{b} y, \\ w &= C_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

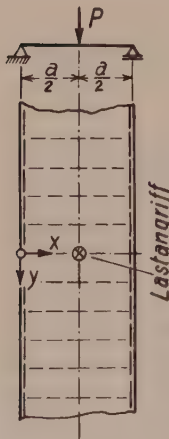


Abb. 4.
Plattenstreifen
unter Einzellast.

erfüllt. Längs der Plattenränder werden dabei die Größen w, N_x, N_y, M_x und M_y zu Null. Nach Einsetzen von (16) und (17) in (15) ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Koeffizienten A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} .

b) Plattenstreifen unter Einzellast.

Abb. 4 entsprechend sei ein quer zu den Versteifungen unendlich langer Plattenstreifen von der Breite a untersucht, der längs seiner beiden Ränder gelenkig gelagert ist und in der Mitte durch eine Einzellast beansprucht wird. Nach einem schon von Nadai² angegebenen Lösungsweg wird zunächst eine längs der x -Achse wirkende Linienlast betrachtet, die als Fourierreihe in der Form

$$\bar{p}(x) = \sum_n c_n \sin n \pi \frac{x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

² A. Nádai: Elastische Platten, S. 78. Berlin, 1925. — Vgl. auch K. Girkmann: Flächen-tragwerke, S. 174. Wien, 1954. — K. Trenks: Bau-Ing. 29, 372 (1954).

dargestellt wird. Die Einzellast P ergibt sich hieraus, wenn die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n = \frac{2P}{a} \sin n \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

gesetzt werden. Die Differentialgleichungen (15) und die Bedingungen an den Rändern $x = 0$ und $x = a$ können in den belastungsfreien Bereichen durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n A_n e^{n \nu \frac{y}{a}} \cos n \pi \frac{x}{a}, \\ v &= \sum_n B_n e^{n \nu \frac{y}{a}} \sin n \pi \frac{x}{a}, \\ w &= \sum_n C_n e^{n \nu \frac{y}{a}} \sin n \pi \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (20a, b, c)$$

befriedigt werden. Setzt man (20) in (15) ein, so erhält man bei jeder Harmonischen für die A_n, B_n, C_n das folgende homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} A_n \left(\frac{1-\mu}{2} \varrho \xi_1 \nu^2 - \varpi^2 \pi^2 \right) + B_n \varrho \left(\mu + \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \right) \nu \pi + \\ + C_n n \left[(1-\mu^2) \varphi \tau \pi^3 + \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \psi_1 \tau \nu^2 \pi \right] &= 0, \\ A_n \varrho \left(\mu + \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \right) \nu \pi - B_n \varrho \left(\nu^2 - \frac{1-\mu}{2} \xi_1 \pi^2 \right) + \\ + C_n n \frac{1-\mu}{2} \psi_1 \xi_1 \tau \nu \pi^2 &= 0, \\ A_n [(1-\mu^2) \varphi \pi^3 - (1-\mu) \varrho \psi_2 \xi_2 \nu^2 \pi] - B_n (1-\mu) \varrho \psi_2 \xi_2 \nu \pi^2 - \\ - C_n n \tau \left[\frac{1}{12} (\lambda \pi^4 - 2 \varrho^3 \nu^2 \pi^2 + \varrho^3 \nu^4) - (1-\mu) \psi_1 \psi_2 \xi_1 \frac{s}{s_B} \nu^2 \pi^2 \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21a, b, c)$$

Aus der Forderung, daß die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems verschwinden muß, ergibt sich eine Gleichung achten Grades für den Parameter ν . Wie aus (21) hervorgeht, ist diese Gleichung glücklicherweise unabhängig von n , da die Determinante nach Division ihrer dritten Spalte durch n diesen Parameter nicht mehr enthält. Die acht Wurzeln der Gleichung für ν brauchen also für eine bestimmte Konstruktion nur einmal ausgerechnet zu werden.

Man erhält damit acht verschiedene Lösungen für die u, v, w und ebenso viele zunächst noch freie Integrationskonstanten. Ein solches Lösungssystem gilt für jede Hälfte des durch die x -Achse geteilten Plattenstreifens; insgesamt sind damit 16 Integrationskonstanten festzulegen. Aus der Bedingung, daß nur Lösungen in Betracht kommen, die mit wachsendem positivem bzw. negativem y abklingen, ergeben sich jedoch sofort acht der Konstanten zu Null. Zur Bestimmung der restlichen acht dienen die Bedingungen, daß längs der x -Achse die Verschiebungsgrößen u, v, w, w', w'', u, v für beide Plattenhälften übereinstimmen müssen und die Differenz der Querkräfte gleich der durch (18) und (19) gegebenen Belastung sein muß. Dieser ganze Rechnungsgang ist in der numerischen Durchführung zwar etwas umständlich, aber durchaus noch tragbar³.

VI. Vergleich zwischen Theorie und Meßergebnissen.

Die in den vorstehenden Abschnitten entwickelte Theorie enthält außer den für dünne Platten üblichen Voraussetzungen einige zusätzliche Annahmen, deren ein-

³ Durch passende Annahmen kann man außerdem leicht zu Näherungen gelangen, die erheblich weniger Rechenaufwand erfordern und in gewissen Parameterbereichen für die Praxis hinreichend genau sind. Für die orthotrope Platte ohne Hohlsteifen ist dies gezeigt bei K. Trenks: a. a. O. — E. Giencke: Stahlbau 24, 128 (1955).

schneidendste wohl die ist, daß die Torsion der Versteifungen ohne Wölbbehinderung vor sich gehen soll. Da es wesentlich erschien, die Zulässigkeit dieser Annahme nachzuweisen, wurden an einem Modell, dessen Abmessungen aus Abb. 5 hervorgehen,

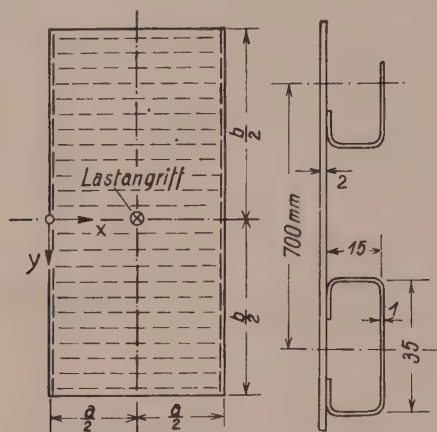


Abb. 5. Versuchsmodell einer orthotropen Platte.

Durchbiegungs- und Dehnungsmessungen durchgeführt und mit dem Resultat der Rechnung verglichen.

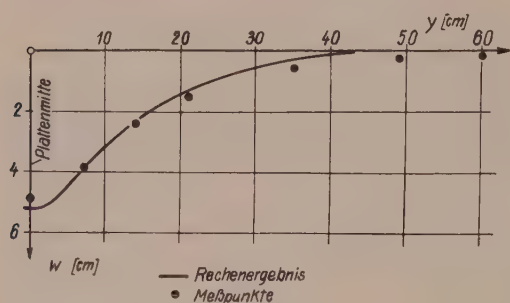


Abb. 7. Plattendurchbiegung für $x = \frac{a}{2}$ in Abhängigkeit von y für eine Einzellast von 100 kg.

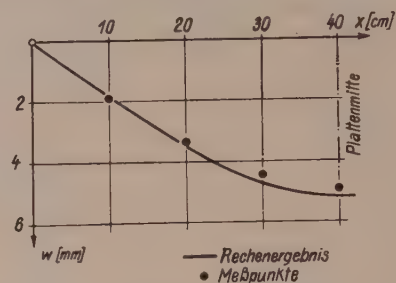


Abb. 6. Plattendurchbiegung für $y = 0$ in Abhängigkeit von x für eine Einzellast von 100 kg.

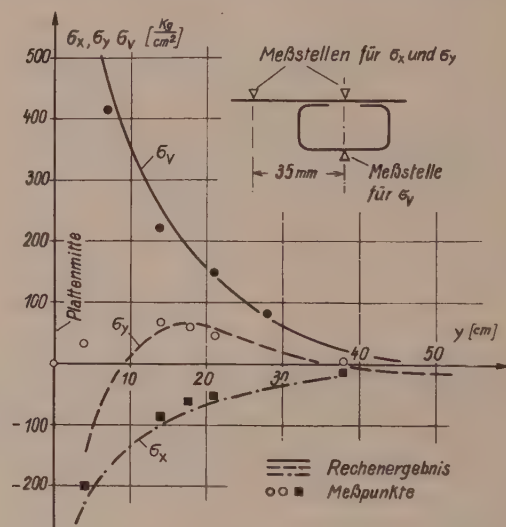


Abb. 8. Längsspannungen σ_x , σ_y (auf der Plattenoberseite) und σ_v (auf der Unterseite der Versteifungen in x -Richtung) für $x = \frac{a}{2}$ in Abhängigkeit von y für eine Einzellast von 100 kg.

Um hinreichend große und gut meßbare Verformungen zu erhalten, wurde als Werkstoff Leichtmetall (Al-Mg-Si-Legierung) mit $E = 700000 \text{ kg/cm}^2$ gewählt. Da eine Schweißung in Anbetracht der dünnen Blechstärke nicht möglich war, wurden die Versteifungen auf das Deckblech mit einem Kunstharz-Kaltkleber geklebt. Jedes Verziehen des Versuchsstückes wurde so ohne Schwierigkeiten vermieden. Dagegen zeigte sich als Nachteil des Klebens eine verhältnismäßig große Nachgiebigkeit der Leimschicht bei Schubbeanspruchung. Diese Verformung wurde durch besondere Versuche bestimmt und die oben entwickelte Theorie zu ihrer Berücksichtigung entsprechend ergänzt. Es sei hier darauf verzichtet, diese Ergänzung im einzelnen anzugeben, da sie nur für die Versuchsauswertung, aber nicht für das Thema dieser Arbeit von Belang ist.

Die Platte wurde an ihren langen Seiten frei aufgelagert, während die kurzen Seiten kräftefrei blieben. Als Belastung wurde eine Einzellast in Plattenmitte aufgebracht,

da die Auswirkung torsionsfester Versteifungen bei einer Beanspruchung durch Einzelasten praktisch besonders wichtig ist. Für die Rechnung wurde die Platte als Streifen von der Breite a aufgefaßt und nach der in Abschnitt 5b angegebenen Methode behandelt. Das Ergebnis zeigt, daß diese Näherung vollkommen hinreichend ist, da an den kurzen Seiten der Platte die Spannungen und Durchbiegungen im Rahmen der Meßgenauigkeit Null sind. Die Versteifungen wirken sich eben so aus, daß die Belastung vorwiegend in x -Richtung zu den Auflagern abgetragen wird und die Beanspruchung in y -Richtung sehr schnell abklingt.

Die Ergebnisse von Rechnung und Messung sind in den Abb. 6, 7 und 8 aufgetragen.

Abb. 6 und 7 zeigen die Durchbiegung der Platte in den Symmetrieebenen, das heißt für $y = 0$ und für $x = \frac{a}{2}$. Die gemessenen Werte sind etwas kleiner als die gerechneten, was auf die in der Theorie nicht berücksichtigte Wölbbehinderung zurückzuführen sein dürfte. Diese Unterschiede sind aber hinreichend klein, um praktisch vernachlässigt werden zu können. Dieses wird um so mehr berechtigt sein, als der Fehler im wesentlichen auf der sicheren Seite liegt. In Abb. 8 sind die Ergebnisse von Dehnungsmessungen dargestellt. Auch hier ist eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung festzustellen. Lediglich in unmittelbarer Nähe der Einzellast wird die Theorie, die hier unendlich große Spannungen liefert, unbrauchbar. In Abb. 8 macht sich das für σ_y bei dem Meßpunkt, der bei $y = 3.5$ cm liegt, bemerkbar. Es handelt sich hier um dieselbe Schwierigkeit, die auch bei der gewöhnlichen Theorie isotroper Platten in der Nähe des Angriffspunktes von Einzellasten auftritt. Falls praktisch überhaupt notwendig, muß hier wie dort die Theorie durch besondere Überlegungen ergänzt werden.

(Eingegangen am 31. März 1955.)

Neue Untersuchungsergebnisse an Brennstoffstrahlen.

Von A. Pischinger und F. Pischinger, Graz.

Mit 10 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Exakte optische Untersuchungen an Brennstoffstrahlen vermitteln neue Erkenntnisse über das Verhalten von Strahlen in ruhender und bewegter Luft und zeigen den Einfluß der Düsenform. Einspritzungen in Vakuum ermöglichen Schlüsse auf die Strömung in der Düse.

Summary. Optical precision measurements on liquid fuel jets have given new information on the behaviour of jets in stagnant and moving air, and have shown the influence of the nozzle shape. By means of injections made into a vacuum it has been possible to draw conclusions on the flow in the nozzle.

Résumé. Des recherches optiques très précises faites sur des jets de carburant conduisent à de nouvelles connaissances sur le comportement de jets dans l'air tranquille et agité, et montrent l'influence de la forme de la tuyère. Des injections dans le vide permettent de tirer des conclusions sur l'écoulement dans la tuyère.

Für alle Wärmekraftmaschinen, bei denen der Brennstoff durch Einspritzung zugeführt wird, nehmen die Untersuchungen über die Ausbildung und das Verhalten des Brennstoffstrahles eine hervorragende Stellung ein. Dies gilt besonders für den Dieselmotor, wo die Güte der in außerordentlich kurzer Zeit vor sich gehenden Gemischbildung entscheidend von der Form des Strahles, seiner Eindringtiefe und seinem Verhalten im bewegten Gas abhängt. Die Einspritzeinrichtung des Dieselmotors besteht aus einer Kolbenpumpe, die periodisch eine bestimmte Menge Dieselöls durch die Einspritzdüse schießt. Der Zugang zur Düse ist knapp vor dem Brennstoffaustritt durch ein federbelastetes Ventil abgeschlossen. Das Ventil wird durch den Pumpen-

druck selbst geöffnet, wenn dieser ein bestimmtes Maß, den Öffnungsdruck, überschreitet, der der Vorspannung der Ventilsfeder entspricht.

Versuche, die Ausbildung und die Zerstäubung des Strahles durch Rechnung zu erfassen, scheiterten bisher. Die Untersuchungen müssen daher vorwiegend durch den Versuch geführt werden. Dabei kommt der optischen Erfassung des Strahlbildes eine besondere Bedeutung zu. Miller und Beardsley¹ gelangen die ersten Filmaufnahmen von Brennstoffstrahlen in ruhenden Medien, wie sie seither auch an anderen Stellen zu einem wichtigen Hilfsmittel für die Forschung wurden.

Im Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Technischen Hochschule Graz wurde in jüngster Zeit von den Verfassern eine Einrichtung gebaut², die es ermöglicht, den Brennstoffstrahl in kurzen, exakt gesteuerten Intervallen photographisch festzuhalten und erstmalig auch systematische Untersuchungen von Brennstoffstrahlen in bewegter Luft anzustellen. Nachstehend sind einige mit dieser Anlage gewonnene neue Ergebnisse mitgeteilt.

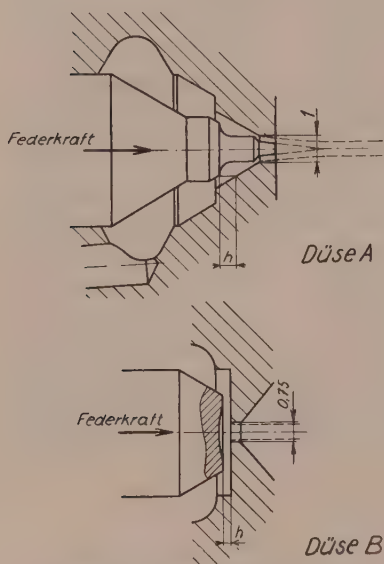


Abb. 1. Einspritzdüsen.

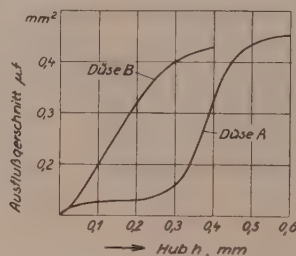


Abb. 2. Wirksamer Ausflußquerschnitt der Brennstoffdüsen.

Abb. 1 zeigt zwei normale, im Motorenbau verwendete Düsen. Düse A (Zapfendüse) hat eine kreisringförmige, Düse B (Lochdüse) eine kreisförmige Austrittsöffnung. Der effektiv wirksame Ausflußquerschnitt ist in Abb. 2 in Abhängigkeit vom Ventilsadelhub h dargestellt. Der Ausbildung der Ventilsadel entsprechend, ist dieser im ersten Teil des Hubes stark verschieden, bei voller Öffnung aber für beide Düsen annähernd gleich. Für die Untersuchungen werden beide Düsen an das gleiche Einspritzsystem (bestehend aus Pumpe und Leitung) angeschlossen, ein Öffnungsdruck von 130 at an der Düse, eine Drehzahl von 1000 U/min und eine Fördermenge von 45 mm³ Dieselöl³ je Einspritzung an der Pumpe eingestellt. Das Fördergesetz des Pumpenkolbens, dessen Geschwindigkeit während der Förderung etwas zunimmt, ist somit für beide Düsen gleich. In beiden Fällen öffnet das Ventil voll. Beide Düsen verhalten sich dabei im Motor wesentlich verschieden. Vergleichende Betrachtungen sollen nun zur Klärung der Ursache des verschiedenen Verhaltens beitragen.

Einspritzungen ohne Einfluß zusätzlicher Luftbewegung.

Die bekannteste und häufig benützte Art der Untersuchung besteht darin, den Strahl beim Einspritzen in ein ruhendes Medium zu beobachten. Abb. 3 zeigt dieses Bild für beide Düsen, wenn in Luft von 20° C und 12 at Druck abgespritzt wird.

¹ H. E. Miller und E. G. Beardsley: N. A. C. A. Bull. Nr. 268 (1927).

² F. Pischinger: Verfahren zur Untersuchung von Dieseleinspritzstrahlen. M. u. W., H. 3 (1955).

³ Das spezifische Gewicht des Brennstoffes beträgt bei 20° C 0.843 g/cm³, die Zähigkeit 0.0608 Poisen.

Die einzelnen Bilder entstammen nicht einer einzigen Einspritzung, sondern einer Vielzahl aufeinanderfolgender Strahlen, wobei der Aufnahmezeitpunkt jeweils genau um 1° Nockenwinkel der Pumpe in Drehrichtung später gelegt ist, das entspricht bei einer

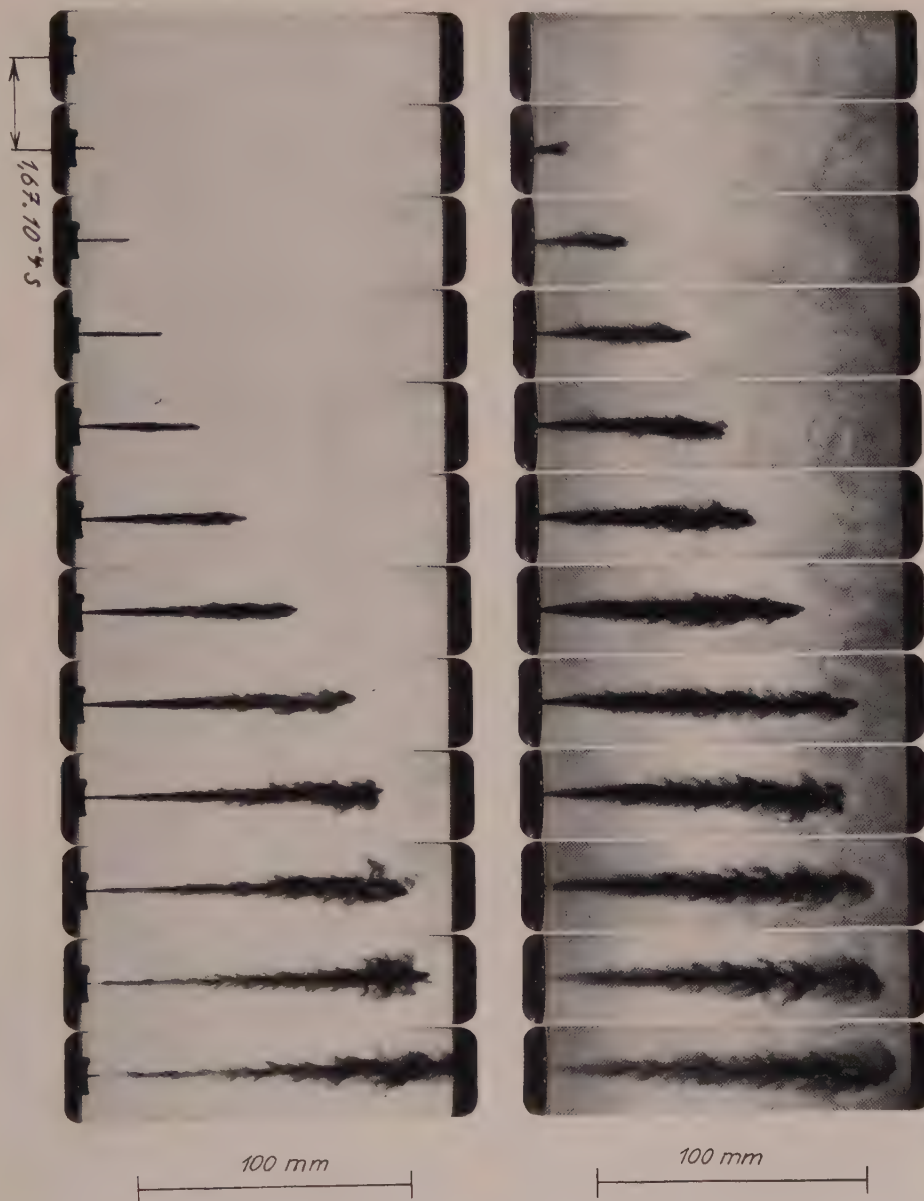


Abb. 3. Einspritzungen in ruhende Luft. Düse A. Düse B.

Pumpendrehzahl von 1000 U/min einer relativen Verschiebung um 0.000167 sec. Mit dieser Aufnahmeart ist es möglich, während der Beobachtung auch allfällige Streuungen in den aufeinanderfolgenden Einspritzungen zu registrieren und auf diese Art und Weise Mittelwerte festzuhalten. Die Kürze der Zeitintervalle ermöglicht auch eine genauere Beobachtung des Strahles knapp nach dem Öffnen des Ventils als bisher.

Die übliche Auswertung dieser Bilder besteht in der Feststellung des Strahlaussehens und in der Aufzeichnung des Eindringweges und der Eindringgeschwindigkeit über der Zeit. Das Strahlaussehen beider Düsen zeigt keine grundlegenden Unterschiede. In Abb. 4 und 5 ist der Weg der Strahlspitze und ihre Geschwindigkeit für beide Düsen und verschiedene Luftdichten dargestellt. Im Gegensatz zu bisherigen Annahmen, daß die Spitzengeschwindigkeit von einem Höchstwert beim Einspritzbeginn an absinkt, steigt sie hier allgemein bis zu einem Höchstwert an, der bei kleinen Luftdichten sogar außerhalb des Bereiches der hier untersuchten Strahllängen fällt, und sinkt erst dann ab. Im Vakuum strebt die Geschwindigkeit einem Höchstwert zu.

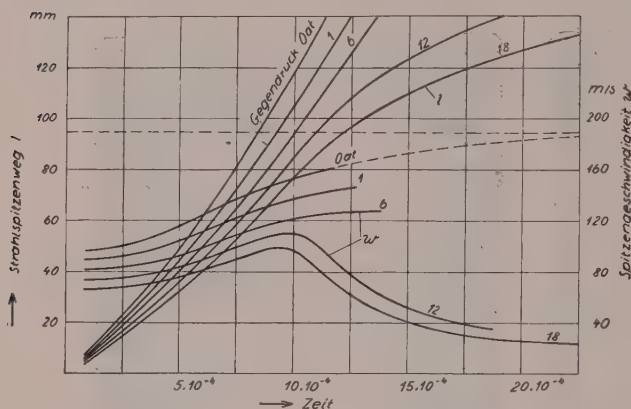


Abb. 4. Strahlspitzenweg l und Geschwindigkeit w für die Düse A.

Aus der Zunahme der Spitzengeschwindigkeit kann man schließen, daß diese stets von neuen Teilchen beeinflusst wird, die nach Spritzbeginn die Düse mit erhöhter Geschwindigkeit verlassen und ihre langsameren Vorgänger überholen oder auf diese einen Impuls übertragen. Demnach muß die Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse und deren Veränderung mit der Zeit von Bedeutung für das Eindringgesetz des Strahles sein.

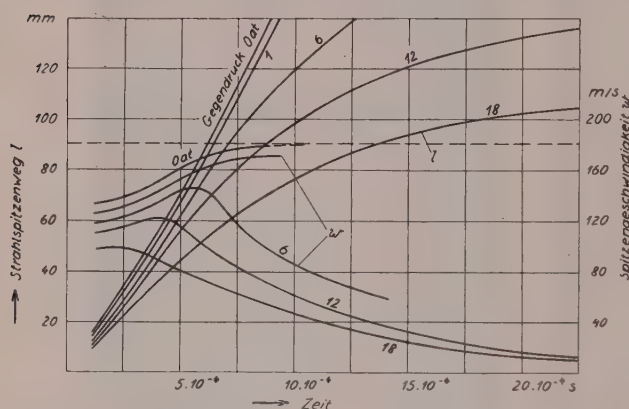


Abb. 5. Strahlspitzenweg l und Geschwindigkeit w für die Düse B.

Einspritzstrahl in seiner Längsrichtung gegliedert ist, entsprechend den bekanntlich in intermittierend arbeitenden Einspritzsystemen auftretenden Druckschwingungen⁴. Die den Druckmaxima entsprechenden Knoten bewegen sich nach Verlassen der Düse mit konstanter Geschwindigkeit fort. Entsprechende Knoten sind in Abb. 6 für Düse A durch Gerade verbunden, deren Steigung die Geschwindigkeit und deren Schnittpunkt mit der in Düsenebene liegenden Horizontalen den Zeitpunkt wiedergibt, in dem an der Düse diese Austrittsgeschwindigkeit herrscht. Auf diese Weise kann die wichtige Größe der Ausflußgeschwindigkeit aus der Düse mit einer Sicherheit bestimmt werden, wie dies mit anderen Meßmethoden bisher nicht möglich war. Sie ist entsprechend Abb. 6 veränderlich, was durch die veränderlichen Drücke vor der Düse und die Drosselung beim Öffnen und Schließen verursacht ist. Bei der

⁴ A. Pischinger: Beitrag zur Mechanik der Druckeinspritzung. ATZ. Beih. 1 (1935).

Zapfendüse A ist sie in der ersten Zeit nach dem Spritzbeginn kleiner als bei der Düse B. Dadurch erklärt es sich, daß die Strahlspitzengeschwindigkeit für die Zapfendüse nach Spritzbeginn zunächst niedriger ist als für die Lochdüse, wie es ein Ver-



Abb. 6. Einspritzungen in Vakuum. Düse A, Düse B.

gleich der Abb. 4 und 5 zeigt. Aus den Strahlbildern im Vakuum ist deutlich zu ersehen, daß die rascheren die langsameren, zuerst abgespritzten Strahlteile einholen oder überholen müssen. Bei Einspritzungen in Luft bleibt zwar die Geschwindigkeit der austretenden Teile nicht mehr konstant, ein Vordrängen der schnelleren Teile ist aber auch dann zu beobachten.



Abb. 7. Brennstoffstrahlen im Querstrom. Düse A. Düse B.



Abb. 8. Brennstoffstrahlen im Gegenstrom. Düse A. Düse B.

Das Bild im Vakuum gibt nicht nur über die Ausflußgeschwindigkeit aus der Düse Auskunft, sondern es läßt auch einen Schluß auf den Zerfall in Luft zu.

Der Strahl der Zapfendüse ist im Vakuum kompakt, und nur die Druckschwingungsknoten sind etwas besser aufgelockert. Das erste Strahlstück nach dem Öffnen der Düse erscheint auch bei der Lochdüse kompakt. Später aber verläßt der Brennstoff die Düse in einem kegelförmig aufgeweiteten Strahl. Besonders erweitert erscheinen die Stellen der Schwingungsknoten. Bei dem aus der Lochdüse strömenden Strahl sind also stärkere radiale Geschwindigkeitskomponenten vorhanden als bei der Zapfendüse, die eine Zersplitterung des Strahles beim Austritt trotz der Oberflächen- und Zähigkeitskräfte bewirken. Der im Vakuum schon am Austritt besser zersplitterte Strahl wird, wie die Abb. 4 und 5 zeigen, auch in Luft letzten Endes stärker abgebremst. Eine streng bewiesene Theorie über den Zerfallsmechanismus derart schnell ausfließender Flüssigkeitsstrahlen im gasförmigen Medium gibt es noch nicht. Nach einer Theorie von Castleman⁵ entstehen unter dem Einfluß der Relativbewegung zwischen Flüssigkeitsoberfläche und Luft feine Flüssigkeitsfäden, die unter dem Einfluß der Oberflächenkräfte in Tröpfchen zerfallen.

Für die Gemischbildung im Dieselmotor ist es nicht ausreichend, der Düse allein die Verteilung des Brennstoffes im Brennraum zu überlassen. Es wird dazu noch eine durch die Kolbenbewegung angefachte Luftbewegung herangezogen. Untersuchungen von Brennstoffstrahlen müssen sich daher auch auf ihre Beeinflussbarkeit durch bewegte Medien erstrecken. Im folgenden ist die Beeinflussung durch zwei einfache Formen der Luftströmung beschrieben.

Das Verhalten im Querstrom.

Der Brennstoffstrahl wird in einer bestimmten Entfernung von der Düse von einem senkrecht zur Strahlachse gerichteten 3 mm breiten Luftstrom angeblasen,

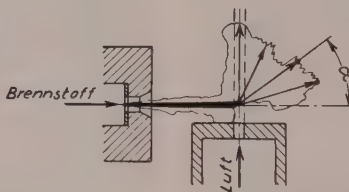


Abb. 9. Verhalten des Brennstoffstrahles bei Querstrom, schematisch.

wie schematisch in Abb. 9 dargestellt. Abb. 7 zeigt das Strahlbild für beide Düsen bei einem Luftdruck von 14 at und einer Luftgeschwindigkeit von 180 m/sec. Der Winkel α , um den ein Teilchen aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, hängt für gegebene Versuchsbedingungen von seiner Masse, seiner Geschwindigkeit, seiner Gestalt (Widerstandsziffer) und auch davon ab, wie weit es infolge seiner Lage im Strahl durch andere Teilchen gegen die Luftströmung abgeschirmt wird. Bestünde der Strahl aus gleichartig beeinflussten und mit gleicher Geschwindigkeit fliegenden Teilchen, so würde jedes und damit der ganze Strahl um den gleichen Winkel abgelenkt werden, wodurch sich keine verbesserte Durchmischung mit der Luft ergäbe. Abb. 7 zeigt, daß dies für einen Dieseleinspritzstrahl nicht zutrifft. Im Bereich des Luftstromes wird der Brennstoff bis nahe zur Strahlachse sehr stark abgelenkt. Der Strahl besteht

⁵ R. A. Castleman jr.: The Mechanism of the Atomisation of Liquids. Bur. Standards J. Res. 369—376, March, 1931.

also offensichtlich aus einem relativ leicht durch die Luftströmung erfaßbaren Strahlmantel und einem durchschlagskräftigeren Kern, wie dies schematisch in Abb. 9 dargestellt ist. Die den Kern bildenden Teilchen verhalten sich nicht gleichartig, so daß sie über einen größeren Winkelbereich fächerförmig verteilt werden. Aus der Größe des Ablenkungswinkels und der Form und Geschwindigkeit eines Teilchens könnte man die Teilchengröße errechnen. Führt man eine solche schätzende Rechnung für eine Kugelform durch, so ergeben sich bei 18° Ablenkungswinkel für die vorliegenden Verhältnisse so große Tropfendurchmesser, wie sie sich im vollkommen zerstäubten Strahl kaum feststellen lassen, woraus folgt, daß an der Anblasestelle die Zerstäubung des Kernes noch lange nicht beendet ist. Die Möglichkeit einer fächerförmigen Auflösung dieses Kernes infolge seiner Inhomogenität ist für die Gemischbildung eine notwendige Voraussetzung.

Die größte Eindringtiefe des Strahles der Düse B beträgt weniger als die Hälfte der des Strahles in ruhender Luft bei gleicher Dichte. Dies läßt den wichtigen Schluß zu, daß der schmale seitliche Luftstrom auch wesentlich zur Zerstäubung beiträgt. Der aufgesplitterte Strahl wird stärker gebremst, weil für Tröpfchen bestimmter Form die Masse mit der dritten, sein Luftwiderstand aber ungefähr mit der zweiten Potenz der Größe abnimmt.

Ein Vergleich der Bilder beider Düsen zeigt auch hier die bessere Durchschlagskraft der Zapfendüse A, die nach dem Gesagten auf einer entsprechenden Struktur des Strahlkernes beruhen muß.

Die Strahlbilder beim seitlichen Anblasen geben somit Auskunft über den Aufbau des Strahles aus Mantel und Kern, welche Tatsachen in Übereinstimmung mit auf anderen Wegen gewonnenen Erkenntnissen stehen (Messung der Brennstoffverteilung im Strahl, Plastilinabdrücke), und zeigen erstmalig die Bedeutung der Inhomogenität des Strahles für die Gemischbildung in bewegter Luft.

Brennstoffstrahlen im Gegenstrom.

Die Versuchsanordnung zeigt schematisch Abb. 10. Der Düse gegenüber liegt eine Bohrung, aus der Luft mit einer Geschwindigkeit von 140 m/sec strömt. Der Druck im Raum vor der Einspritzdüse beträgt 14 at, die Temperatur vor der Luft-

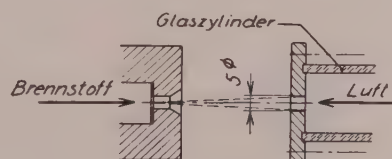


Abb. 10. Versuchsanordnung für Gegenstrom.

bohrung 20°C . Abb. 9 zeigt die Strahlentwicklung für beide Düsen. Infolge der vergrößerten Relativgeschwindigkeit zwischen Brennstoff und Luft wird der Strahlkern rascher aufgelöst und bildet durch die turbulente Luftbewegung einen gegenüber den Abspritzungen in ruhende Luft stark vergrößerten Mantel. Die Bremswirkung auf den Strahlkern der Lochdüse ist so groß, daß dieser die Luftbohrung nicht mehr nennenswert durchschlagen kann. Die größere Durchschlagskraft des Strahles der Zapfendüse zeigt sich auch hier, denn sein Kern durchschlägt die Luftbohrung kräftig.

(Eingegangen am 10. Mai 1955.)

Bemerkung über Stoßprobleme für verbundene Systeme nach der Lagrangeschen Methode.

Von Th. Pöschl, Karlsruhe.

Zusammenfassung. Stoßprobleme, die bei Gelenksystemen auftreten, werden in den meisten Lehrbüchern mit Hilfe der „synthetischen“ Methode gelöst, bei der jedes Glied für sich durch Anbringung der Gelenks- und Führungskräfte betrachtet wird, die sodann wieder eliminiert werden, um den Bewegungszustand nach dem Stoß zu erhalten. Dieser Umweg wird bei der Lagrangeschen Methode vermieden. Einfache Beispiele.

Summary. Impact problems occurring with linkages are in most textbooks solved by means of the “synthetic” method, according to which each member is separately studied with its link and guiding forces, these being afterwards eliminated again in order to obtain the motion after the impact. This detour is avoided by using Lagrange’s method. Finally simple examples are given.

Résumé. Les problèmes de choc, qui se présentent dans des systèmes d’articulation, sont, dans la plupart des livres d’étude, résolus à l’aide de la méthode « synthétique » dans laquelle on considère chaque membre pour lui-même, en appliquant les forces d’articulation et de guidage, que l’on élimine ensuite pour obtenir l’état du mouvement après le choc. Ce détour est évité dans la méthode Lagrange. Exemples simples.

Die „synthetische“ Behandlung von Stoßproblemen für Körpersysteme, die durch Gelenke oder Kurvenführungen miteinander verbunden sind, besteht bekanntlich darin, daß die Verbindungen der Systeme gelöst gedacht werden und die zwischen diesen wirkenden Kräfte nach dem Gegenwirkungsprinzip eingeführt und für jedes System die Gleichgewichtsbedingungen der so entstehenden Kräftegruppen angesetzt werden. Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, müssen diese Verbindungskräfte aus den Gleichungen wieder eliminiert werden, so daß dieses Verfahren offenbar einen Umweg darstellt. Bei der Lagrangeschen Methode wird dieser Umweg vermieden und die Bewegungsgleichungen unmittelbar aus den Ansätzen für die kinetische und potentielle Energie gewonnen. Die Bewegungsgleichungen, die für Stoßvorgänge nur die Geschwindigkeiten erhalten, sind dann keine Differential-, sondern lineare algebraische Gleichungen. Bei der Anwendung dieses Verfahrens, das außer von Lagrange selbst in einigen Werken (z. B. bei E. T. Whittaker, E. J. Routh u. a.) dargestellt ist, ist auf einen Umstand hinzuweisen, auf den sich die folgenden Bemerkungen beziehen.

Bei Anwendung der Lagrangeschen Methode wird — ganz so wie bei kontinuierlichen Kräften — die Lage des Systems durch unabhängige Koordinaten q_i (oder Parameter) festgelegt, deren Zahl der Freiheitsgrade des Systems entspricht. In diesen Koordinaten wird sowohl die kinetische (T) als auch die potentielle Energie (U) ausgedrückt, wobei die Koeffizienten durch ihre Ausgangswerte (das sind die Werte vor dem Stoß) ersetzt werden. Dann erscheint T als eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten mit konstanten Koeffizienten, wobei die Geschwindigkeitsänderungen durch den Stoß als Unbekannte auftreten. Da das System in irgendeiner Weise „gegen fest“ abgestückt wird oder mit irgendwelchen Geschwindigkeiten „auf fest“ auftrifft oder unmittelbar durch Stöße (Impulse) einflußt wird, erscheint die potentielle Energie in der Form

$$U = \text{Impuls} \times \text{Geschwindigkeitsänderung durch den Stoß},$$

die ebenfalls die Geschwindigkeitsänderung als Unbekannte enthält.

Hat man ein System mit n Freiheitsgraden, so lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der impulsiven Bewegung

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_0 = Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wobei Q_i die in der angedeuteten Weise den Koordinaten q_i zugeordneten generalisierten Impulse bedeuten.

Der Ausdruck für T ist, wie gesagt, durch dieselben Überlegungen aufzustellen, wie es im Falle kontinuierlicher Kräfte zu geschehen pflegt, wobei nur der Umstand zu beachten ist, daß die Geschwindigkeiten an den Stoßstellen mit endlichen Beträgen einzuführen sind, während die ihnen entsprechenden „Koordinaten“ die Werte behalten, die sie vor dem Stoß hatten. Dies entspricht genau den für Impulsbewegungen üblichen Ansätzen, bei denen lokale Geschwindigkeitsänderungen zugelassen werden können, ohne daß die Lagekoordinaten irgendwelche Änderungen erfahren. In ähnlicher Weise ist auch beim Ansatz für die „potentielle Impulsenergie“ vorzugehen, — falls dieser Ausdruck für die Übertragung auf Impulsbewegungen als angemessen angesehen werden kann.

Ein einfaches Beispiel möge die Anwendung dieses Verfahrens im Hinblick auf die angegebene Besonderheit erläutern. Andere, in den bekannten Lehrbüchern (von Routh, Lamb, Love, Smart u. a.) behandelten Beispiele können alle nach dieser Methode in einfacher Weise gelöst werden.

Vier gleichförmige Stäbe von der Länge $2a$ und der Masse m liegen in Form eines Quadrates auf einer waagrechten Ebene; eine Ecke A des Quadrates wird von einem Stoß I in Richtung der Diagonalen getroffen. Man berechne die Geschwindigkeit u von A und die Winkelgeschwindigkeit ω der Seiten (die aus Symmetriegründen gleich groß sind).

Die kinetische Energie des Quadrates ist

$$T = m \left(2u^2 - \frac{8ua\omega}{\sqrt{2}} + \frac{20a^2\omega^2}{3} \right)$$

und die potentielle Energie

$$U = -Ju.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial u} = - \frac{\partial U}{\partial u} & : \quad m \left(4u - \frac{8a\omega}{\sqrt{2}} \right) = J, \\ \frac{\partial T}{\partial a\omega} = 0 & : \quad m \left(- \frac{8u}{\sqrt{2}} + \frac{40a\omega}{3} \right) = 0. \end{cases}$$

Daraus folgen die Werte

$$u = \frac{5a\omega\sqrt{2}}{3} \quad \text{und} \quad a\omega = \frac{5J}{8m}.$$

Wenn die vier Seiten einen Rhombus mit dem Winkel α bilden, der mit einer Geschwindigkeit V auf eine feste Ebene auftrifft (s. Routh), so erhält man in ähnlicher Weise

$$T = m \left[2u^2 - 8ua\omega \sin \alpha + a^2\omega^2 \left(\frac{8}{3} + 8 \sin^2 \alpha \right) \right], \quad U = -4mVu$$

und durch die partiellen Ableitungen nach u und $a\omega$:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{V \sin \alpha}{a(1 + 3 \sin^2 \alpha)}, \quad u = V + 2a\omega \sin \alpha.$$

Diese Werte stellen die Anfangsbedingungen für die darauf folgende Bewegung dar.

(Eingegangen am 26. Mai 1955.)

On Torsion with Variable Twist*.

By E. Reissner, Cambridge, Mass.

Summary. Ordinary differential equations and boundary conditions are obtained, by means of variational methods, for the determination of the effect of restraint against warping on spanwise variation of twist, and location of center of twist in the torsion of cylindrical shafts. Certain general conclusions concerning the location of the center of twist conclude the paper.

Zusammenfassung. In der Arbeit werden gewöhnliche Differentialgleichungen und Grenzbedingungen abgeleitet für die Bestimmung des Einflusses der axialen Normalspannungen auf die Tordierung von zylindrischen Stäben. Insbesondere wird das Problem des „Torsions Center“ behandelt. Die Methode besteht in einer Verbesserung der St. Venantschen Theorie mit Hilfe der Variationsrechnung.

Résumé. Dans ce travail, on déduit des équations différentielles normales et des conditions de limite pour déterminer l'influence des tensions normales axiales sur la torsion de barres cylindriques. On traite en particulier du problème du «Torsions Center». La méthode consiste en une amélioration de la théorie de St. Venant à l'aide du calcul de variations.

I. Introduction.

The present note is concerned with the problem of torsion of cylindrical shafts of arbitrary cross section. We consider a shaft which is built-in at one end and acted upon by a torque at the other end. We are primarily interested in two questions:

1. the effect of warping restraint on the relation between torque and twist;
2. the effect of warping restraint on the location of the center of twist.

Among earlier work on these questions we mention in particular considerations by Cicala¹ on the center of twist, by the author on beams with symmetrical cross sections² and by Benscoter³ on thin-walled hollow shafts. The results of the present note are believed to go somewhat beyond known earlier results.

We begin with a brief restatement of St. Venant's torsion theory and Cicala's determination of the center of twist. We then endeavor to analyze the effect of warping restraint by suitable variational methods.

II. Fundamentals of St. Venant theory for uniform twist.

Let x and y be coordinates in the plane of the cross section, the coordinate axes coinciding with the principal axes through the centroid of the section. Let z be the axial coordinate.

Expressions for displacements are

$$\left. \begin{aligned} u &= \theta z (y - y_0), & v &= -\theta z (x - x_0), \\ w &= \theta \Phi(x, y) + \theta (y_0 x - x_0 y) + \theta \Phi_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where x_0, y_0, Φ_0 are arbitrary constants, θ is the angle of twist and Φ is St. Venant's warping function. Expressions for stresses are

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \theta \left[y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right], \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = G \theta \left[-x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* The results of this note were included in hectographed lecture notes of the author which were written in December, 1953. Acknowledgment is made of support received in the preparation of this paper by the Office of Naval Research of the United States Navy, under a Contract with the Massachusetts Institute of Technology.

¹ P. Cicala: Atti R. Accad. Sci. Torino **70**, 356—371 (1935).

² E. Reissner: J. Math. and Physics **31**, 214—221 (1952).

³ S. U. Benscoter: J. appl. Mechan. **21**, 25—34 (1954).

Equilibrium conditions in the interior and on the surface of the shaft lead to the differential equation

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

and to the boundary conditions

$$f(x, y) = 0: \tau_{xz} dy - \tau_{yz} dx = 0, \quad (4)$$

$$z = 0, L \left\{ \begin{aligned} \iint \tau_{xz} dA &= \iint \tau_{yz} dA = 0, \\ \iint (y \tau_{xz} - x \tau_{yz}) dA &= T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

In terms of the warping function Φ these boundary conditions assume the form

$$f = 0: \left(y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dy - \left(-x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx = 0, \quad (4')$$

$$z = 0, L \left\{ \begin{aligned} \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} dA &= \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} dA = 0, \\ \iint \left[y^2 + x^2 + y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dA &= \frac{T}{G \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

With

$$I_p = \iint (x^2 + y^2) dA \quad (6)$$

and the formula

$$\iint (y \Phi_x - x \Phi_y) dA = - \iint (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dA = -D, \quad (7)$$

the last of equations (5') is equivalent to $T = G \theta C$, where $C = I_p - D$ is the torsional rigidity of the shaft.

The above results hold for arbitrary values of the constants x_0, y_0, Φ_0 . As the cross sections rotate about the point (x_0, y_0) this point may be called the center of twist. Evidently, force boundary conditions for the ends $z = 0$ and $z = L$ of the shaft leave this point undetermined and some condition involving displacements must be added. A possible definition is to say that the center of twist is given by those values of x_0 and y_0 which make $w = 0$ over one end section. However, St. Venant's solution does not permit satisfaction of this condition. Cicala proposes instead the condition

$$\iint w^2 dA = \text{Min.} \quad (9)$$

Evaluation of condition (9) gives

$$x_0 I_x = \iint y \Phi dA, \quad y_0 I_y = - \iint x \Phi dA, \quad \Phi_0 A = - \iint \Phi dA, \quad (10)$$

where

$$I_x = \iint y^2 dA, \quad I_y = \iint x^2 dA, \quad A = \iint dA. \quad (11)$$

The fact that this point (x_0, y_0) coincides with another point which Trefftz⁴ has defined as center of shear has been discussed by Weinstein⁵.

III. Approximate solution for torsion without end-section warping by means of variational method.

We generalize St. Venant's displacement equations (1) in the following form

$$\left. \begin{aligned} u &= \beta(z) y + u_0(z), & v &= -\beta(z) x + v_0(z), \\ w &= \alpha(z) \Phi(x, y) + m_0(z) x + n_0(z) y + w_0(z). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

The functions $\beta, u_0, v_0, \alpha, m_0, n_0$ and w_0 will be determined by a variational procedure. The quantity Φ is St. Venant's warping function, which means that it satisfies

⁴ E. Trefftz: *Z. angew. Math. u. Mechan.* 15, 220—225 (1935).

⁵ A. Weinstein: *Quart. Appl. Math.* 5, 97—99 (1947).

equations (3), (4'), and (7) and the first two of equations (5'). In what follows Φ is considered given.

In addition to assuming suitable expressions for displacements we make the following assumptions for stresses. We set as in St. Venant's theory

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (13)$$

but do not assume σ_z as vanishing. We write

$$\sigma_z \equiv \sigma, \quad \tau_{xz} \equiv \tau_x, \quad \tau_{yz} \equiv \tau_y. \quad (14)$$

We take as boundary conditions at the fixed end of the shaft,

$$z = 0: u = v = w = 0. \quad (15)$$

If (12) represented the exact solution of the three-dimensional problem then (15) would imply the relations $\beta(0) = u_0(0) = v_0(0) = \alpha(0) = m_0(0) = n_0(0) = w_0(0) = 0$. For the approximate solution which is to be obtained this will not necessarily be so.

Boundary conditions at the end of the shaft at which the torque is applied are of the form

$$z = L \left\{ \begin{aligned} \iint \tau_x dA &= \iint \tau_y dA = 0, \\ \iint (y \tau_x - x \tau_y) dA &= T, \\ \sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Relevant stress strain relations are of the form

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma}{E}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_x}{G}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_y}{G}. \quad (17)$$

To proceed further we make use of a variational equation for stresses and displacements⁶. The equation

$$\delta I = 0, \quad (18)$$

where

$$I = \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + \dots + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tau_{yz} - W(\sigma_x \dots \tau_{yz}) \right] dx dy dz - \iint_{S_2} [(u - \bar{u}) p_x + \dots] dS - \iint_{S_1} [u \bar{p}_x + \dots] dS, \quad (19)$$

is equivalent to equilibrium equations of the form

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \text{ etc.}, \quad (20)$$

to stress strain relations of the form

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_x}, \text{ etc.} \quad (21)$$

and to boundary conditions

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}, \text{ etc. on } S_2, \\ p_x &= \bar{p}_x, \text{ etc. on } S_1. \end{aligned} \quad (22)$$

For the problem as stated in (12) to (17) the integral I becomes

$$\begin{aligned} I = \iiint \left\{ [\alpha' \Phi + m_0' x + n_0' y + w_0'] \sigma + [\beta' y + u_0' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \alpha + m_0] \tau_x + \right. \\ \left. + [-\beta' x + v_0' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \alpha + n_0] \tau_y - \frac{\sigma^2}{2E} - \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{2G} \right\} dx dy dz - \\ - [\beta \bar{T}]_L + \iint \{ [\alpha \Phi + m_0 x + n_0 y + w_0] \sigma + [\beta y + u_0] \tau_x + \\ + [-\beta x + v_0] \tau_y \}_0 dx dy. \end{aligned} \quad (23)$$

Primes indicate differentiation with respect to z .

⁶ E. Reissner: J. Math. and Physics 29, 90—95 (1950).

The relation $\delta I = 0$ becomes

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \left[\alpha' \Phi + m_0' x + n_0' y + w_0' - \frac{\sigma}{E} \right] \delta \sigma + \left[\beta' y + u_0' + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \alpha + m_0 - \frac{\tau_x}{G} \right] \delta \tau_x + \right. \\ & \quad + \left[-\beta' x + v_0' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \alpha + n_0 - \frac{\tau_y}{G} \right] \delta \tau_y + [\Phi \sigma] \delta \alpha' + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tau_y \right] \delta \alpha + \\ & \quad + [x \sigma] \delta m_0' + [\tau_x] \delta m_0 + [y \sigma] \delta n_0' + [\tau_y] \delta n_0 + [\sigma] \delta w_0' + [y \tau_x - x \tau_y] \delta \beta' + \\ & \quad + [\tau_x] \delta u_0' + [\tau_y] \delta v_0' \} dx dy dz - \bar{T} \delta \beta(L) + \iiint \{ [\alpha \Phi + m_0 x + n_0 y + w_0] \delta \sigma + \\ & \quad + [\beta y + u_0] \delta \tau_x + [-\beta x + v_0] \delta \tau_y + [\Phi \sigma] \delta \alpha + [x \sigma] \delta m_0 + [y \sigma] \delta n_0 + [\sigma] \delta w_0 + \\ & \quad + [y \tau_x - x \tau_y] \delta \beta + [\tau_x] \delta u_0 + [\tau_y] \delta v_0 \}_0 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Suitable integrations by part transform (24) as follows.

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ [\dots] \delta \sigma + [\dots] \delta \tau_x + [\dots] \delta \tau_y + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tau_y - \Phi \sigma' \right] \delta \alpha + \right. \\ & \quad + [\tau_x - x \sigma'] \delta m_0 + [\tau_y - y \sigma'] \delta n_0 - [\sigma'] \delta w_0 - [y \tau_x' - x \tau_y'] \delta \beta - [\tau_x'] \delta u_0 - \\ & \quad - [\tau_y'] \delta v_0 \} dx dy dz + \iiint (y \tau_x - x \tau_y) dA - \bar{T} \delta \beta(L) + \iiint \tau_x dA \delta u_0 \Big|_L + \\ & \quad + \iiint \tau_y dA \delta v_0 \Big|_L + \iiint \Phi \sigma dA \delta \alpha + \iiint x \sigma dA \delta m_0 + \iiint y \sigma dA \delta n_0 + \iiint \sigma dA \delta w_0 \Big|_L + \\ & \quad + \iiint \{ [\alpha \Phi + m_0 x + n_0 y + w_0] \delta \sigma + [\beta y + u_0] \delta \tau_x + [-\beta x + v_0] \delta \tau_y \}_0 dA = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

All variations in (25) are independent. This means that (25) is equivalent to the following system of ordinary differential equations and boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E [\alpha' \Phi + m_0' x + n_0' y + w_0'], \\ \tau_x &= G \left[\beta' y + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_0' + m_0 \right], \\ \tau_y &= G \left[-\beta' x + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_0' + n_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} & \iiint \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tau_y \right] dA - \left[\iiint \Phi \sigma dA \right]' = 0, \\ & \iiint \tau_x dA - \left[\iiint x \sigma dA \right]' = 0, \\ & \iiint \tau_y dA - \left[\iiint y \sigma dA \right]' = 0, \\ & \left[\iiint \sigma dA \right]' = 0, \quad \left[\iiint (y \tau_x - x \tau_y) dA \right]' = 0, \\ & \left[\iiint \tau_x dA \right]' = 0, \quad \left[\iiint \tau_y dA \right]' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$z = L \left\{ \begin{aligned} & \iiint (y \tau_x - x \tau_y) dA = \bar{T}, \\ & \iiint \tau_x dA = 0, \quad \iiint \tau_y dA = 0, \\ & \iiint \Phi \sigma dA = 0, \quad \iiint x \sigma dA = 0, \\ & \iiint y \sigma dA = 0, \quad \iiint \sigma dA = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$z = 0 \left\{ \begin{aligned} & \alpha = 0, \quad m_0 = 0, \quad n_0 = 0, \quad w_0 = 0, \\ & \beta = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Equations (26) to (29) are a system of approximate differential equations and boundary condition which are compatible with assumptions (12) to (16) in the generalized "least square" sense embodied in the variational procedure.

IV. Reduction of Differential Equations.

The last four of equations (27) in conjunction with the appropriate boundary conditions (28) reduce to

$$\iint (y \tau_x - x \tau_y) dA = \bar{T}, \quad (30)$$

$$\iint \tau_x dA = 0, \quad \iint \tau_y dA = 0, \quad (31)$$

$$\iint \sigma dA = 0. \quad (32)$$

With the help of (31) there follows next

$$\iint x \sigma dA = 0, \quad \iint y \sigma dA = 0. \quad (33)$$

We now introduce the stress strain relations (26) into the first of equations (27) and into (30) to (33). This gives

$$G \iint \left\{ \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \beta' + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \alpha + (u_0' + m_0) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (v_0' + n_0) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} dA - \\ - E \iint \{ \Phi^2 \alpha'' + m_0'' x \Phi + n_0'' y \Phi + w_0'' \Phi \} dA = 0, \quad (34)$$

$$G \iint \left\{ (y^2 + x^2) \beta' + \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \alpha + (u_0' + m_0) y - (v_0' + n_0) x \right\} dA = \bar{T}, \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \iint \left\{ \beta' y + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (u_0' + m_0) \right\} dA &= 0, \\ \iint \left\{ -\beta' x + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (v_0' + n_0) \right\} dA &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\iint \{ \alpha' \Phi + m_0' x + n_0' y + w_0' \} dA = 0. \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \iint \{ \alpha' x \Phi + m_0' x^2 + n_0' x y + w_0' x \} dA &= 0, \\ \iint \{ \alpha' y \Phi + m_0' x y + n_0' y^2 + w_0' y \} dA &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Equations (34) to (38) simplify, if account is taken of the fact that

$$\iint x dA = \iint y dA = \iint x y dA = \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} dA = \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} dA = 0.$$

We also use the relations (6) and (7). Therewith

$$G \{ -D \beta' + D \alpha \} - E \{ \alpha'' \iint \Phi^2 dA + m_0'' \iint x \Phi dA + \\ + n_0'' \iint y \Phi dA + w_0'' \iint \Phi dA \} = 0, \quad (39)$$

$$G \{ I_x \beta' - D \alpha \} = \bar{T}, \quad (40)$$

$$u_0' + m_0 = 0, \quad v_0' + n_0 = 0, \quad (41)$$

$$\alpha' \iint \Phi dA + w_0' \iint dA = 0, \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' \iint x \Phi dA + m_0' \iint x^2 dA &= 0, \\ \alpha' \iint y \Phi dA + n_0' \iint y^2 dA &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

We now introduce the coordinates of the center of twist according to St. Venant's theory, from equations (10) and (11). We also set

$$\iint \Phi^2 dA = I^* \quad (44)$$

and

$$\iint \Phi dA = \bar{\Phi} A, \quad \iint dA = A. \quad (45)$$

Then,

$$G D (\alpha - \beta') - E [I^* \alpha'' - y_0 I_y m_0'' + x_0 I_x n_0'' + \bar{\Phi} A w_0''] = 0, \quad (46)$$

$$G (I_x \beta' - D \alpha) = \bar{T}, \quad (40)$$

$$\boxed{w_0' = -\bar{\Phi} \alpha', \quad m_0' = y_0 \alpha', \quad n_0' = -x_0 \alpha'.} \quad (47)$$

From (29) follows that (47) may be integrated to

$$w_0 = -\bar{\Phi} \alpha, \quad m_0 = y_0 \alpha, \quad n_0 = -x_0 \alpha. \quad (48)$$

Therewith, equation (46) reduces to

$$GD(\alpha - \beta') - E[\Gamma^* - y_0^2 I_y - x_0^2 I_x - A\bar{\Phi}^2] \alpha'' = 0. \quad (49)$$

If we finally write (40) in the form

$$\boxed{\alpha = \frac{I_p}{D} \beta' - \frac{\bar{T}}{GD}} \quad (50)$$

and introduce this expression into (49) we obtain as differential equation for β

$$\boxed{GC\beta' - E\Gamma \frac{I_p}{D} \beta''' = \bar{T},} \quad (51)$$

where

$$\boxed{\Gamma = \Gamma^* - [y_0^2 I_y + x_0^2 I_x + A\bar{\Phi}^2].} \quad (52)$$

It is quite readily verified that this expression for Γ is also obtained from the expression $\Gamma = \int (w/\theta)^2 dA$, where w/θ is taken from equation (1).

Having β we obtain α from (50) and w_0 , m_0 and n_0 from (48). Introduction of these values into (26) gives an approximate expression for the axial stress σ in terms of β ,

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} = \frac{I_p}{D} [\Phi + y_0 x - x_0 y - \bar{\Phi}] \beta''.} \quad (53)$$

In view of (41) and (50) we have for τ_x and τ_y , also from (26)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_x}{G} &= \left[y + \frac{I_p}{D} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \beta' - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\bar{T}}{GD}, \\ \frac{\tau_y}{G} &= \left[-x + \frac{I_p}{D} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \beta' - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\bar{T}}{GD}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

It remains to express the location of the center of twist in terms of β . Let $x_T(z)$ and $y_T(z)$ be the coordinates of this center within the framework of the present theory. From (12) it follows that

$$y_T = -\frac{u_0}{\beta}, \quad x_T = \frac{v_0}{\beta}. \quad (55)$$

Now from (41) and (48) there follows

$$u_0' = -y_0 \alpha, \quad v_0' = x_0 \alpha. \quad (56)$$

In (56) we introduce α from (50) and integrate from the fixed end $z = 0$ on. This gives, with $\alpha(0) = 0$ and $\beta(0) = 0$,

$$\left. \begin{aligned} u_0(z) &= -\left[\frac{I_p}{D} \beta(z) - \frac{\bar{T}z}{GD} \right] y_0, \\ v_0(z) &= \left[\frac{I_p}{D} \beta(z) - \frac{\bar{T}z}{GD} \right] x_0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Therewith, we have from (55)

$$\boxed{\begin{aligned} y_T &= \left[\frac{I_p}{D} - \frac{\bar{T}z}{GD\beta} \right] y_0, \\ x_T &= \left[\frac{I_p}{D} - \frac{\bar{T}z}{GD\beta} \right] x_0. \end{aligned}} \quad (58)$$

The form of equations (58) allows one interesting conclusion, without explicit determination of β . Restraint against warping surely makes β smaller than it would be without warping. Accordingly the contents of the bracket are smaller with warping restraint than without. This means that y_T is numerically smaller than y_0 and x_T is numerically smaller than x_0 . In other words, restraint against warping leads to a location of the center of twist closer to the centroid of the cross section than without the restraint.

The following further observations may be made

- (1) If $E = 0$ in (51) then $GC\beta = \bar{T}z$ and, as is readily seen $y_T = y_0$ and $x_T = x_0$.
- (2) By L'Hospital's rule it follows that

$$\frac{y_T(0)}{y_0} = \frac{x_T(0)}{x_0} = \frac{I_p}{D} - \frac{\bar{T}}{GD\beta'(0)} \quad (59)$$

Since $\alpha(0) = 0$ is one of the boundary conditions it follows further from (50) that

$$\boxed{\beta'(0) = \frac{\bar{T}}{GI_p}} \quad (60)$$

exactly as in the theory for the doubly symmetrical cross section². Combination of (59) and (60) gives

$$\frac{y_T(0)}{y_0} = \frac{x_T(0)}{x_0} = \frac{I_p}{D} - \frac{\bar{T}}{GD} \frac{GI_p}{\bar{T}} = 0 \quad (61)$$

and we have the interesting result that at the end section at which warping is prevented the center of twist coincides with the centroid of the section.

At large distances from the fixed end section the angle β tends to agree with its value according to the St. Venant theory, that is with the value which follows from (51) with $E = 0$. Accordingly at large distances from the fixed end the center of twist tends toward the same point which is obtained from St. Venant theory with the additional stipulation that $\iint w^2 dA = \text{Min.}$

(Received, April 26, 1955.)

Bemerkungen zur Theorie der Membranschalen.

Von E. Tschech, Graz.

Mit 7 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf Membranschalen, die unter konstantem innerem Überdruck stehen. Als Koordinatenlinien werden die Krümmungslinien der Fläche gewählt. Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden die allgemeinen Gleichgewichtsbeziehungen. Diese werden mit Hilfe der Codazzischen Gleichungen in eine übersichtliche Form gebracht, die sofort die Lösungen für die einfachen Schalen ersehen läßt.

Summary. The present paper refers to membrane shells subjected to a constant inner overpressure. After having chosen the lines of curvature as curvilinear surface coordinates, the general equilibrium conditions are taken as a starting point of the investigation. By means of the Codazzi equations they are put into a clear form that permits to recognize at once the solutions for the simple shells.

Résumé. Ce travail traite de coques de membranes soumises à une pression intérieure constante. On choisit comme lignes de coordonnées les courbes de la surface. On prend comme point de départ des considérations les conditions générales d'équilibre. On leur donne, au moyen des équations de Codazzi, une forme claire qui fait immédiatement apparaître les solutions pour les coques simples.

Sehr dünnwandige Schalen werden Verbiegungen praktisch keinen Widerstand entgegensetzen und die Lasten, für die sie gebaut sind, nur durch gleichmäßig über die Schalenstärke verteilte Längs- und Schubspannungen aufnehmen. Solche Schalen heißen im Gegensatz zur Biegeschale Membranschalen. Die Berechnung ihrer Schnittkräfte ist durch den Fortfall der Biegemomente und Querkräfte sehr wesentlich vereinfacht. Sie ist eine statisch bestimmte Aufgabe, da an jeder Stelle drei Gleichgewichtsbeziehungen zur Berechnung der zwei Längskräfte und der einen Schubkraft zur Verfügung stehen. Die Spannungsberechnung ist daher unabhängig von den Verformungen durchführbar, man kann sich dabei die Schale aus einem völlig undeformbaren Material gefertigt denken. In Wirklichkeit hat eine solche Schale aber eine endliche Dehnsteifigkeit und eine wenn auch geringe Biegesteifigkeit. In ihr treten natürlich auch Biegespannungen auf. Sie werden aber unbedeutend sein und nur den Charakter von Nebenspannungen haben. Sie stellen keine notwendigen Bestandteile der inneren Kräfte, die die Lasten tragen, dar. Sie sind nur nötig, um für die sonst nicht vorhandene Kontinuität der Formänderungen zu sorgen.

Bei den vorliegenden Betrachtungen soll die Schalenmittelfläche in Parameterform gegeben sein

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v).$$

Es entspricht jedem Wertepaar u und v ein Flächenpunkt, durch jeden Flächenpunkt geht bei geeigneter Parameterwahl eine u -Linie und eine v -Linie. Diese Koordinatenlinien bilden auf der Fläche ein Netz, von dem wir annehmen, daß es als orthogonales Netz gewählt sei. Die ersten Fundamentalgrößen sollen wie üblich mit $E, F = 0, G$ bezeichnet sein, die zweiten Fundamentalgrößen mit L, M und N . Formuliert man an einem durch je zwei benachbarte u - und v -Linien begrenzten rechtwinkligen Flächenelement, das an der Stelle (u, v) in Richtung u -Linie die Länge ds_1 und in Richtung v -Linie die Länge ds_2 hat, die Gleichgewichtsbedingungen, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + \kappa_2(N_{22} - N_{11}) - 2\kappa_1 N_{12} + p_1 &= 0, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} + \kappa_1(N_{11} - N_{22}) - 2\kappa_2 N_{12} + p_2 &= 0, \\ n_1 N_{11} + n_2 N_{22} + 2t N_{12} + p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen bedeuten Gleichgewicht gegen Verschieben in der Tangentialebene der Schale, die dritte lineare Gleichung das Gleichgewicht normal zur Schale. N_{11} und N_{22} sind die Längskräfte in Richtung s_1 und s_2 , N_{12} die Schubkräfte, p_1, p_2, p_3 die an der Flächeneinheit der Schale angreifende äußere Last in den drei Richtungen s_1, s_2 und der Flächennormalen. Die n_1, κ_1, t_1 sind die drei Krümmungen der u -Linien, n_2, κ_2, t_2 die der v -Linien; n ist die Normalkrümmung der Flächenkurve, κ ihre geodätische Krümmung und t ihre geodätische Torsion. Wegen der Orthogonalität der Koordinatenlinien ist $t_1 = t_2 = t$.

Auf jeder Schale gibt es eine die Fläche doppelt überdeckende orthogonale Kurvenschar, ihre Krümmungslinien. Für sie sind n_1 und n_2 die Hauptkrümmungen und die geodätische Torsion t gleich Null. Wählt man diese natürlichen Linien als Koordinatenlinien, was wir hier tun wollen, so vereinfacht sich die dritte Gleichung noch um das Glied $2t N_{12}$.

Im folgenden sollen nur Membranschalen unter konstantem innerem Überdruck betrachtet werden, der Belastungsfall also der vom Standpunkt der Flächentheorie aus interessant ist. Es ist dann in den Gleichungen $p_1 = p_2 = 0$ zu setzen und $p_3 = p$ ist eine Konstante (Abb. 1). Unsere Ausgangsgleichungen lauten dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + \kappa_2 (N_{22} - N_{11}) - 2 \kappa_1 N_{12} &= 0, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} + \kappa_1 (N_{11} - N_{22}) - 2 \kappa_2 N_{12} &= 0, \\ n_1 N_{11} + n_2 N_{22} &= p. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Auf jeder solchen Schale gibt es dann zwei orthogonale Kurvenscharen, einmal die erwähnten Krümmungslinien und dann die Hauptnormalspannungstrajektorien I und II (Abb. 2). Dabei sind die Krümmungslinien der Fläche durchaus nicht

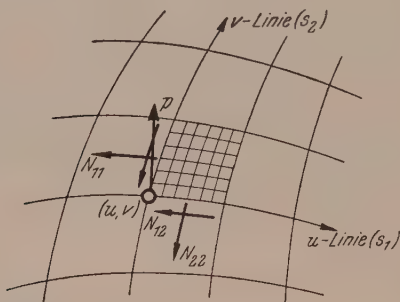


Abb. 1. Das Flächenelement.

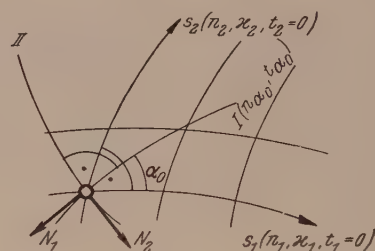


Abb. 2. Die Krümmungslinien und die Hauptnormalspannungslinien.

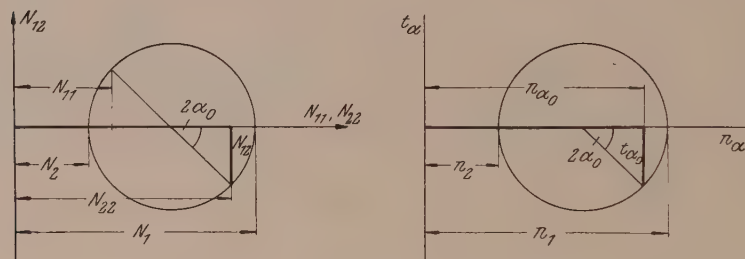


Abb. 3. Der Spannungskreis.

zugleich die Hauptspannungstrajektorien, sondern sie schließen miteinander einen Winkel α_0 ein, so daß

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 N_{12}}{N_{11} - N_{22}}.$$

Die Hauptlängskräfte sollen N_1 und N_2 heißen. Der Spannungstensor an jeder Stelle kann durch den Mohrschen Kreis veranschaulicht werden (Abb. 3), und ebenso können die Krümmungsverhältnisse der Schale an jeder Stelle dargestellt werden, denn die Normalkrümmung ist

$$n_\alpha = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2}{2} \cos 2 \alpha$$

und die geodätische Torsion ist

$$t_\alpha = \frac{n_2 - n_1}{2} \sin 2 \alpha.$$

Wie man sieht, ist die geodätische Torsion der Hauptspannungstrajektorien den längs der Krümmungslinien auftretenden Schubkräften proportional. Fallen die Hauptspannungslinien mit den Krümmungslinien zusammen ($\alpha_0 = 0$), so ist ihre geodätische Torsion $t_{\alpha_0} = 0$ und die Krümmungslinien sind schubspannungsfrei;

ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, so haben die Hauptspannungslinien die größte an dieser Stelle vorhandene geodätische Torsion $\frac{n_2 - n_1}{2}$ und die Schubkräfte längs der Krümmungslinien sind maximal $\frac{N_2 - N_1}{2}$.

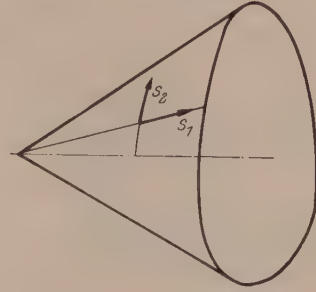
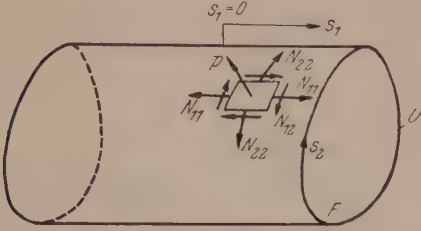


Abb. 4. Die Zylinderschale mit beliebigem Querschnitt.

Abb. 5. Die Kegelschale mit beliebigem Querschnitt.

Für gewisse Flächen ist das Gleichungssystem (1) leicht zu lösen. In erster Linie sind dies die Schalen, deren eine Hauptkrümmung, z. B. n_1 , gleich Null ist. Die einfachste dieser Flächen ist die Zylinderschale mit beliebigem Querschnitt (Abb. 4). Ein unendlich langes Rohr von beliebigem Querschnitt ist eine Schale, die inneren Überdruck nicht mit Membrankräften allein aufnehmen kann. Schließt man ein solches Rohr endlicher Länge an seinen beiden Enden durch Böden geeignet ab, so wirkt es als Membranschale. Die Gl. (1) ergeben aus der dritten Gleichung

$$N_{22} = p \frac{1}{n_2} = p r_2 \quad (r_2 = \text{Hauptkrümmungsradius}),$$

und, da die Krümmungslinien hier auch geodätische Linien sind, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, aus der zweiten Gleichung

$$N_{12} = -p \int \frac{\partial r_2}{\partial s_2} ds_1 + v(s_2)$$

und wegen $s_1 = 0$: $N_{12} = 0$

$$N_{12} = -p \frac{\partial r_2}{\partial s_2} \cdot s_1.$$

Aus der ersten Gleichung folgt dann die zweite Längskraft

$$N_{11} = p \frac{\partial^2 r_2}{\partial s_2^2} \frac{s_1^2}{2} + w(s_2).$$

Die Gleichungen lassen erkennen, daß dort, wo r_2 unendlich groß ist, auch N_{22} unendlich wird. Die Zylinderschale ist dort eben, und der Innendruck kann durch Membrankräfte allein nicht aufgenommen werden. Es werden sich also dort Biegespannungen wesentlich an der Lastaufnahme beteiligen. Die Zylinderschale muß also überall konvex sein, wenn es in ihr nur Membrankräfte geben soll. Auch darf sich dann die Krümmung der Querschnittskurve nicht sprunghaft ändern, denn sonst ändert sich auch N_{22} sprunghaft und N_{12} und N_{11} werden dort unendlich, was praktisch wieder das Auftreten von Biegespannungen bedeutet. Aus den Ergebnissen entnimmt man weiter, daß $N_{12} = 0$, wenn $\frac{\partial r_2}{\partial s_2}$ den Wert Null hat. Nur der Rotations- (Kreis-) Zylinder ist längs aller Erzeugenden schubspannungsfrei. Zur Ermittlung der willkürlichen Funktion $w(s_2)$ ist zuerst anzusetzen

$$F p = \oint N_{11} ds_2 = p \frac{s_1^2}{2} \oint \frac{\partial^2 r_2}{\partial s_2^2} ds_2 + \oint w(s_2) ds_2 = \oint w(s_2) ds_2,$$

wenn F die Querschnittsfläche bedeutet. Der Verlauf der Funktion $w(s_2)$ bleibt dabei unbestimmt. Zu ihrer Festlegung ist eine Deformationsbeziehung notwendig. Sollen z. B. sämtliche Mantelstrahlen des Zylinders auch nach der Deformation gleich lang sein, so muß wegen

$$E \delta \varepsilon_{11} = N_{11} - \nu N_{22} = \frac{\partial u}{\partial s_1} E \delta$$

gelten

$$\int_0^{l/2} (N_{11} - \nu N_{22}) ds_1 = E \delta u = E \delta c.$$

Die einfache Rechnung ergibt dann für

$$N_{11} = p \frac{\partial^2 r_2}{\partial s_2^2} \left(\frac{s_1^2}{2} - \frac{l^2}{24} \right) + \nu p \left(r_2(s_2) - \frac{1}{U} \oint r_2(s_2) ds_2 \right) + \frac{F p}{U}.$$

Betrachtet man auf Innendruck beanspruchte Kegelschalen (Abb. 5) mit beliebigem Querschnitt, so liefert das Gleichungssystem (1) wieder

$$N_{22} = p r_2$$

und da hier nur $\kappa_1 = 0$, wird die zweite Gleichung

$$-\frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} - 2 \kappa_2 N_{12} = -p \frac{\partial r_2}{\partial s_2}.$$

Setzt man hier für κ_2 den allgemeinen Ausdruck $-\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial s_1}$ ein, so folgt

$$\frac{1}{G} \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} = -p \frac{\partial r_2}{\partial s_2}$$

und die Lösung

$$N_{12} = -p \frac{1}{G} \left\{ \int G \frac{\partial r_2}{\partial s_2} ds_1 + v(s_2) \right\}.$$

Aus der ersten Gleichung kann N_{11} errechnet werden, wenn man jetzt für $\kappa_2 = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial s_1}$ setzt

$$\frac{\partial(N_{11} \sqrt{G})}{\partial s_1} = -\sqrt{G} \left(\kappa_2 N_{22} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} \right).$$

Die Krümmungslinien s_1 und s_2 sind hier die Mantelstrahlen und die Kreise, die sich in der Abwicklung um die Kegelspitze zeichnen lassen.

Die Gl. (1) können unter Heranziehung der Codazzischen Gleichungen

$$\frac{\partial n_2}{\partial s_1} = \kappa_2 (n_2 - n_1), \quad \frac{\partial n_1}{\partial s_2} = \kappa_1 (n_1 - n_2)$$

umgeformt werden. Setzt man in der ersten Gleichung für $\kappa_1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial s_2}$ und für N_{22} den Wert aus der dritten Gleichung, so erhält man

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} - \kappa_2 N_{11} - \kappa_2 \frac{n_1}{n_2} N_{11} + \frac{1}{E} \frac{\partial(N_{12} E)}{\partial s_2} = -p \frac{\kappa_2}{n_2}.$$

Aus der ersten Codazzischen Gleichung folgt

$$-n_1 \kappa_2 = \frac{\partial n_2}{\partial s_1} - n_2 \kappa_2.$$

Setzt man das ein, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} - 2 \kappa_2 N_{11} + \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_2}{\partial s_1} N_{11} + \frac{1}{E} \frac{\partial(N_{12} E)}{\partial s_2} &= -p \frac{\kappa_2}{n_2} \\ \text{oder} \quad \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial s_1} N_{11} + \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_2}{\partial s_1} N_{11} + \frac{1}{E} \frac{\partial(N_{12} E)}{\partial s_2} &= -p \frac{\kappa_2}{n_2}. \end{aligned}$$

Die ersten drei Glieder bedeuten die Ableitung des Produktes $(N_{11} G n_2)$, so daß man erhält

$$\frac{1}{G n_2} \frac{\partial(N_{11} G n_2)}{\partial s_1} + \frac{1}{E} \frac{\partial(N_{12} E)}{\partial s_2} = -p \frac{\kappa_2}{n_2}$$

und ebenso

$$\frac{1}{G} \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} + \frac{1}{E n_1} \frac{\partial(N_{22} E n_1)}{\partial s_2} = -p \frac{n_1}{n_1}.$$

Zieht man auch noch die rechten Seiten herüber, so nehmen die Gl. (1) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G n_2} \frac{\partial G n_2 \left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} \right)}{\partial s_1} + \frac{1}{E} \frac{\partial(N_{12} E)}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{1}{G} \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} + \frac{1}{E n_1} \frac{\partial E n_1 \left(N_{22} - \frac{p}{2 n_1} \right)}{\partial s_2} &= 0, \\ n_1 N_{11} + n_2 N_{22} &= p. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

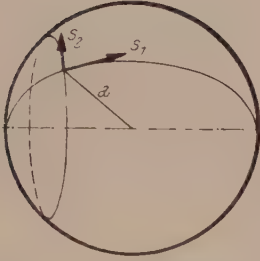


Abb. 6. Die Kugelschale.

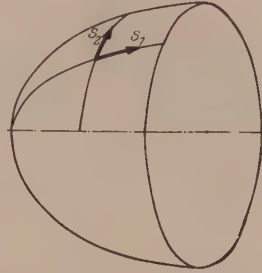


Abb. 7. Die Rotationsschale.

Für die Kugelschale (Abb. 6) ist $n_1 = n_2 = \frac{1}{a}$, $E = a^2$ und G eine Funktion von s_1 . Daher können die Gl. (2) geschrieben werden:

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G \left(N_{11} - \frac{p a}{2} \right)}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} = 0,$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} + \frac{\partial \left(N_{22} - \frac{p a}{2} \right)}{\partial s_2} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial G \left(N_{11} - \frac{p a}{2} \right)}{\partial s_1} + \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} - \frac{\partial G \left(N_{11} - \frac{p a}{2} \right)}{\partial s_2} = 0.$$

Mit $G \left(N_{11} - \frac{p a}{2} \right)$ und $N_{12} G$ als Unbekannte sind das die Riemann-Cauchy-Gleichungen, die schon F. Martin¹ für $p = 0$ durch geeignete Umformung aus den üblichen Membrangleichungen der Kugelschale hergeleitet hat. $N_{11} = N_{22} = \frac{p a}{2}$ sind die Normalkräfte der geschlossenen Kugel unter Innendruck, $N_{12} = 0$.

Für die Rotationsschalen (Abb. 7) sind n_1, n_2, E, G nur Funktionen von s_1 und so nimmt das Gleichungssystem (2) die Form an:

$$\frac{1}{G n_2} \frac{\partial G n_2 \left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} \right)}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} = 0,$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial(N_{12} G)}{\partial s_1} - \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial \left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} + p \frac{(n_2 - n_1)^2}{2 n_1^2 n_2} \right)}{\partial s_2} = 0$$

¹ F. Martin: Ingenieur-Arch. 17 (1949).

oder auch

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n_2} \frac{\partial G n_2 \left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} \right)}{\partial s_1} + \frac{\partial (N_{12} G)}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{\partial (N_{12} G)}{\partial s_1} - \frac{n_1}{n_2^2} \frac{\partial G n_2 \left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} \right)}{\partial s_2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit $\left(N_{11} - \frac{p}{2 n_2} \right) G n_2$ und $N_{12} G$ als Unbekannte.

Die rotationssymmetrische Lösung verlangt $N_{12} = 0$, somit

$$N_{11} = \frac{C}{G n_2} + \frac{p}{2 n_2}; \quad N_{22} = -C \frac{n_1}{G n_2^2} + \frac{p}{2 n_2} \left(2 - \frac{n_1}{n_2} \right).$$

C ist dann in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung von (3) eine Konstante; für die geschlossene Rotationsschale ist $C = 0^2$.

(Eingegangen am 11. Mai 1955.)

Zur Ermittlung des Trägheitspoles und der Trägheitspolkurve.

Von H. Weirich, Darmstadt.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Nach einer kurzen Behandlung der charakteristischen Pole des eben bewegten starren Systems werden Methoden zur Ermittlung des Trägheitspoles mit Hilfe des Tangential- oder Impulspoles angegeben. Die Anwendung dieser Verfahren wird an Hand der Konstruktion des Trägheitspoles der allgemeinen Zweipunktführung gezeigt. Abschließend werden auf analytischem Wege Trägheitspol und Trägheitspolkurve des Kreuzschiebers betrachtet und dabei auch Fälle mit speziellen Lagen des Systemschwerpunktes erfaßt.

Summary. After a short discussion of the characteristic poles of the plain rigid system in continuous motion methods are indicated for the ascertainment of the pole of inertia by means of the tangential- or impulse-pole. The application of this method is shown supported by the construction of the pole of inertia of the general two-point guidance. Finally the pole of inertia and the inertia pole curve of the cross-slide are looked into analytically, whereby also cases with special positions of the centre of gravity of the system are dealt with.

Résumé. Après un court traitement des pôles caractéristiques du système plane rigide en mouvement continu des méthodes sont indiquées pour la recherche du pôle d'inertie à l'aide du pôle de tangente ou du pôle d'impulsion. L'application de ces procédés est montrée au moyen de la construction du pôle d'inertie du guidage général à deux points. Finalement le pôle d'inertie et la courbe de pôle d'inertie du tiroir à crosse sont examinées par la voie analytique en y traitant aussi des cas avec des positions spéciales du centre de gravité du système.

I. Einleitung.

Für kinetostatische Untersuchungen ebener Getriebe wurde von H. Winter¹ erstmalig der Trägheitspol eingeführt. Er ist der Mittelpunkt eines geradlinig begrenzten Kraftbüschels des Systems aller resultierenden Trägheitskräfte einer eben bewegten Scheibe, die zu gleichem Drehpol, gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber zu veränderlicher Winkelbeschleunigung gehören. H. Winter bestimmt den Trägheitspol auf graphischem Wege. Ebenfalls graphischer Methoden bedienen sich R. Beyer²,

² B. Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. VII. Leipzig. 1945. — W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin. 1934. — W. Flügge und E. Tschech: Statik der Höhenkammern. Bericht der DVL 1942. — M. Lagally: Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig. 1944.

¹ Der Trägheitspol und seine Verwendung in der graphischen Dynamik ebener Getriebe. S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 139, 151 (1930).

² Der Trägheitspol in der Getriebedynamik. Maschinenbau RM-Afg 3, 642 (1935).

R. Kraus³, G. Gerber⁴ und O. Tolle⁵. Für besondere Lagen des Getriebes und zu Kontrollzwecken ist das von K. Federhofer⁶ angegebene analytische Verfahren besonders gut geeignet, das nicht nur die Festlegung des Trägheitspoles, sondern auch die Bestimmung des Ortes aller Lagen des Poles während seiner Bewegung — das ist die Trägheitspolkurve⁷ — gestattet.

Bezeichnend für alle diese Verfahren ist, daß sie sich entweder des Drehpoles, Beschleunigungspoles und Wendepoles bedienen oder die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhältnisse in irgendeiner Form benützen. Es lassen sich aber auch, wie hier gezeigt werden soll, nur mit Verwendung des Tangentialpoles oder Impulspoles, die unter Umständen einfacher als z. B. der Wendepol zu bestimmen sind, einfache Konstruktionen zur Ermittlung des Trägheitspoles angeben.

II. Die charakteristischen Pole des eben bewegten starren Systems.

Zum besseren Verständnis der folgenden Betrachtungen sollen zunächst die charakteristischen Pole, durch welche der augenblickliche Bewegungszustand eines

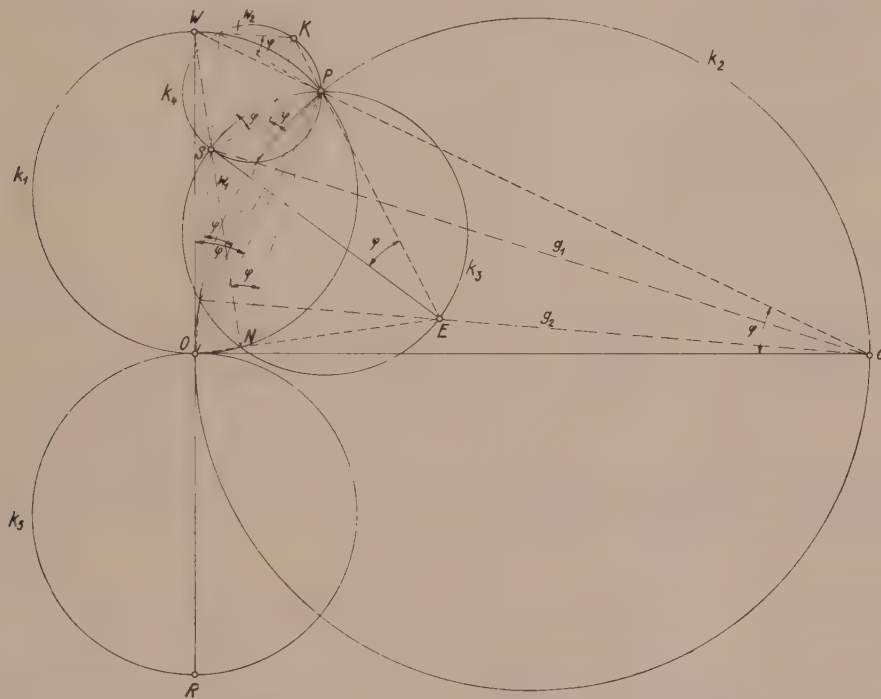


Abb. 1. Die charakteristischen Pole, Bressesche und Pöschlsche Kreise.

eben bewegten Systems gekennzeichnet ist und ihre Lage auf den Bresseschen und Pöschlschen Kreisen in Abb. 1 angegeben werden. Dabei versteht man unter den

³ Trägheitspol aus zwei Beschleunigungszuständen. Maschinenbau RM-Afg 4, 337 (1936).

⁴ Neues Verfahren zur Ermittlung des Trägheitspoles. Maschinenbau RM-Afg 8, 533 (1940).

⁵ Über Anwendungen von Plänen relativer Normalbeschleunigungen in der Getriebedynamik. Ingenieur-Arch. 22, 227 (1954).

⁶ Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 240 (1951).

⁷ Siehe auch K. Federhofer: Die Trägheitspolkurve als Hilfsmittel der Dynamik ebener Getriebe. VDI-Tagungsheft 1, Getriebetechnik, S. 101 (1953). — O. Tolle: Die Trägheitspolkurve der Schubstange eines zentrischen Schubkurbelgetriebes (Näherungslösung). Ingenieur-Arch. 21, 365 (1953).

ersteren den Wendekreis k_1 und den Tangential- oder Gleichenkreis k_2 , unter den letzteren die Beschleunigungspolkreise erster und zweiter Art k_3, k_4 . Der Kreis k_5 ist der Rückkehrkreis, der nur der Vollständigkeit halber gezeichnet wurde, fernerhin aber nicht benötigt werden wird. Die charakteristischen Pole selbst sind der Drehpol O , Beschleunigungspol P , Wendepol W , Tangentialpol G , Impulspol E , der Pol K , der als Kraftpol bezeichnet werden soll, und der Rückkehrpol R . Die Geraden w_1, w_2 sind die Wendepolgeraden, g_1, g_2 die Tangentialpolgeraden. Die Eigenschaften der Kreise k_1 bis k_5 sowie der Pole werden als bekannt vorausgesetzt.

III. Konstruktion des Trägheitspoles T mit Hilfe des Tangentialpoles G oder Impulspoles E .

Von einem ebenen starren System, dessen Bewegung in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen bekannt ist, sind der Drehpol O , der Schwerpunkt S und seine Be-

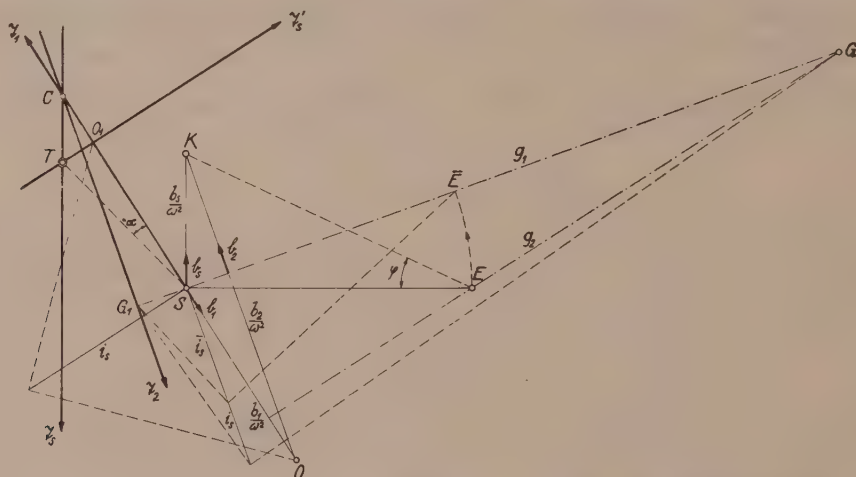


Abb. 2. Konstruktion des Trägheitspoles mit Hilfe des Tangentialpoles.

schleunigung b_s , die Masse M und der Trägheitshalbmesser i_s bezüglich des Schwerpunktes gegeben. Man kann nun, wie leicht zu beweisen ist, eine Zerlegung der Schwerpunktsbeschleunigung nach der Beziehung

$$b_s = b_1 + b_2 \quad (1)$$

vornehmen, worin

$$b_1 = \overline{SO} \omega^2$$

in Richtung SO und

$$b_2 = \overline{SG} \varepsilon$$

senkrecht zu SG bedeuten und ω und ε die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Systems sind. Damit ist bereits ein Weg zur Konstruktion des Trägheitspoles T gewiesen, denn die beiden Trägheitskräfte

$$\mathfrak{T}_1 = -M b_1, \quad \mathfrak{T}_2 = -M b_2 \quad (2)$$

sind die Komponenten der resultierenden Trägheitskraft \mathfrak{T}_s des Systems. Sie gehen durch die Schwingungsmittelpunkte der zu b_1 und b_2 zugehörigen Beschleunigungspole.

In der Abb. 2 sind die reduzierten Beschleunigungen $\frac{b_s}{\omega^2}, \frac{b_1}{\omega^2}, \frac{b_2}{\omega^2}$ durch die Strecken $\overline{SK}, \overline{SO}, \overline{OK}$ dargestellt. Der zur Beschleunigung b_1 gehörige Beschleunigungspol fällt mit O zusammen, folglich liegt die Wirkungslinie von \mathfrak{T}_1 bereits in Richtung \overline{SO} .

Der b_2 zugeordnete Beschleunigungspol ist mit dem Tangentialpol G identisch, so daß die zugehörige Trägheitskraft \mathfrak{T}_2 durch den Schwingungsmittelpunkt G_1 des um G drehbar gedachten Systems gehen muß. Der Punkt G_1 auf der Tangentialpolgeraden g_1 kann sofort durch Konstruktion der einfachen Beziehung

$$\overline{SG}_1 = \frac{v_s^2}{\overline{SG}} \quad (3)$$

gefunden werden. Bringt man die beiden Wirkungslinien von \mathfrak{T}_1 und \mathfrak{T}_2 zum Schnitt, so ist C ein Punkt der zur Beschleunigung b_s parallelen Wirkungslinie der Trägheitskraft

$$\mathfrak{T}_s = -M b_s, \quad (4)$$

die schon einen geometrischen Ort für den Trägheitspol T darstellt. Ein zweiter Ort für T ergibt sich mit Hilfe der Beziehung

$$b_s^* = b_s + \lambda v_s, \quad (5)$$

worin b_s^* ein von b_s verschiedener Beschleunigungszustand des Systems ist, der durch die Konstante λ charakterisiert wird und v_s die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist⁸. Die der Beschleunigung λv_s proportionale Trägheitskraft

$$\mathfrak{T}_s' = -M \lambda v_s \quad (6)$$

parallel zu v_s , das ist normal zu OS , geht durch den Schwingungsmittelpunkt O_1 des im Drehpol O gelagerten Systems, wobei jetzt O_1 durch Konstruktion von

$$\overline{SO}_1 = \frac{v_s^2}{\overline{SO}} \quad (7)$$

erhalten wird. Der Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien von \mathfrak{T}_s und \mathfrak{T}_s' ergibt den Trägheitspol T .

Bei dieser Konstruktion genügt also außer den oben gegebenen Elementen die Kenntnis des Tangentialpoles G . Liegt dieser nicht bereits vor, so erhält man ihn z. B. nach Abb. 2 leicht, wenn man durch den Impulspol E , der wegen des bekannten Beschleunigungswinkels φ nach $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{b_s}{\omega^2 \overline{SE}}$ auf der Normalen zu b_s in S sofort angegeben werden kann, die Tangentialpolgerade g_2 legt und diese mit der Tangentialpolgeraden g_1 zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt ist schon der Tangentialpol G .

Tritt der Fall ein, daß der Tangentialpol G nicht mehr auf der Zeichenfläche liegt, dann muß für die obige Konstruktion von T zunächst die Strecke \overline{SG}_1 auf der Tangentialpolgeraden g_1 auf eine andere Art ermittelt werden. Dies ist möglich, denn wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OSK und GES in Abb. 2 gilt die Proportion

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SG}}, \text{ woraus mit (3)}$$

$$\overline{SG}_1 = v_s^2 \frac{\overline{SK}}{\overline{SE} \overline{OK}} \quad (8)$$

folgt. Damit kann die Strecke \overline{SG}_1 bestimmt und mit ihr der Trägheitspol T wie früher konstruiert werden.

Eine weitere Möglichkeit, die Strecke \overline{SG}_1 ohne den Tangentialpol G zu finden, besteht darin, in Abb. 2 auf der Tangentialpolgeraden g_1 in Richtung nach G die Strecke \overline{SE} abzutragen, wodurch zunächst der Punkt \overline{E} erhalten wird. Dann ergibt

⁸ Dieser Satz wurde von E. Stübler: Das Beschleunigungssystem bei der Bewegung eines starren Körpers, Jber. Dtsch. Math.-Vereinigung 19, 177 (1910) hergeleitet.

sich G_1 als Gegenpunkt von \bar{E} bezüglich eines Kreises um S mit dem Radius \bar{i}_s . Letzterer kann mit Beachtung von (8) aus

$$\bar{i}_s^2 = \overline{SG_1} \overline{SE} = i_s^2 \frac{\overline{SK}}{\overline{OK}} \quad (9)$$

gefunden werden, so daß die Strecke $\overline{SG_1}$ und der Trägheitspol T wieder wie oben konstruierbar sind.

Wesentlich einfacher kann jedoch der Trägheitspol T mit alleiniger Kenntnis des Impulspoles E ermittelt werden. Liegt E nicht bereits vor, so führt die Konstruktion desselben wieder mit Benutzung des

Beschleunigungswinkels φ rasch zum Ziel. Da nun E der Beschleunigungspol zum Beschleunigungszustand b_s ist, so muß in Abb. 3 die Trägheitskraft \mathfrak{T}_s durch den Schwingungsmittelpunkt E_1 von E gehen, der aus der Beziehung

$$\overline{SE_1} = \frac{i_s^2}{\overline{SE}} \quad (10)$$

erhalten werden kann. Die Wirkungslinie von \mathfrak{T}_s stellt bereits den ersten geometrischen Ort für den Trägheitspol T dar. Der zweite ergibt sich wieder nach Gl. (6). Im Schnittpunkt beider Orte liegt der Trägheitspol T .

Schließlich gibt es eine noch einfachere Konstruktion von T mittels des Punktes N , den man in Abb. 3 als Schnittpunkt von OE mit dem Beschleunigungspolkreis erster Art k_3 erhält. Der Träg-

Abb. 3. Konstruktion des Trägheitspoles mit Hilfe des Impulspoles.

heitspol T ist in diesem Falle der Gegenpunkt von N in bezug auf einen Kreis um S mit dem Radius i_s . Der Beweis folgt sofort mit Beachtung von Gl. (7), denn es ist

$$\overline{ST} = \frac{\overline{SO_1}}{\cos \alpha} = \frac{i_s^2}{\overline{SO} \cos \alpha} = \frac{i_s^2}{\overline{SN}}. \quad (11)$$

Es sei noch bemerkt, daß der Punkt N auch auf dem Wendekreis k_1 , somit also im Schnitt von k_1 mit k_3 liegt. Auf der Richtung von NS liegt außer T der bei den hier angegebenen Konstruktionen nicht benötigte Wendepol W .

IV. Der Trägheitspol der allgemeinen Zweipunktführung.

Von einem starren System mit dem Schwerpunkt S , der Masse M und dem Trägheitsradius i_s bewegen sich zwei Punkte A , B auf zwei Kurven mit bekannten Krümmungsmittelpunkten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} . Der Punkt A besitze die Geschwindigkeit v_A und die Beschleunigung b_A .

Für die Konstruktion des Trägheitspoles T nach den unter III. angegebenen Methoden muß vorerst die Schwerpunktsbeschleunigung b_s , z. B. mit Hilfe des freien Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplanes, bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wird in Abb. 4 zunächst aus b_A die Geschwindigkeit v_A ermittelt. Man erhält diese, wenn man b_A auf die Bahnnormale von A projiziert, dann die dadurch erhaltene Normalbeschleunigung $n_A = \frac{v_A^2}{A\mathfrak{A}}$ in Richtung $\overline{A\mathfrak{A}}$ aufträgt und über $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ als Durchmesser einen Halbkreis schlägt, der auf der Tangente in A bereits die Geschwindigkeit v_A

abschneidet. Diese Geschwindigkeit trägt man in Abb. 4a von einem Geschwindigkeitsnullpunkt o aus ab, $v_A = \vec{o a}$, zieht $o b \perp OB$ und $a b \perp AB$, wodurch sich in $\vec{o b} = v_B$ die Geschwindigkeit des Punktes B und in $\vec{a b} = v_{BA}$ die relative Geschwindigkeit des Punktes B gegen A ergibt. Ebenso erhält man durch Zeichnung von $a s \perp AS$, $b s \perp BS$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $v_s = \vec{o s}$ und die relativen Geschwindigkeiten $v_{sA} = \vec{a s}$, $v_{sB} = \vec{b s}$.

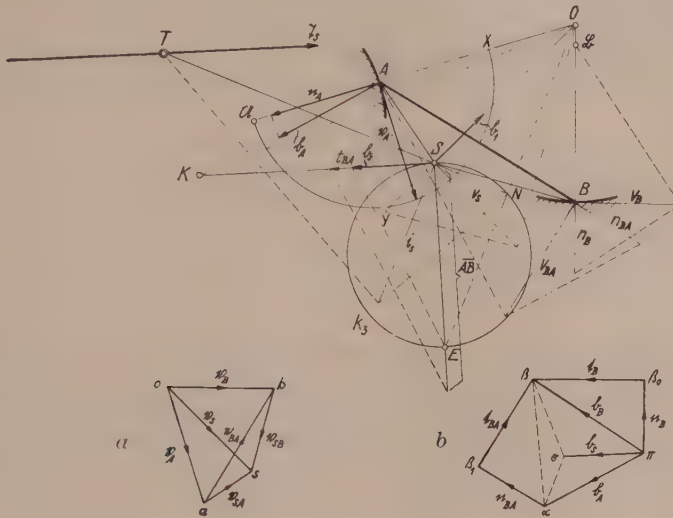


Abb. 4. Der Trägheitspol der allgemeinen Zweipunktführung.

Im Beschleunigungsplan Abb. 4b trägt man von einem Beschleunigungsnullpunkt π nach Richtung und Größe b_A ab. Die Beschleunigung des Punktes B ergibt sich aus den Beziehungen

$$b_B = n_B + t_B = b_A + n_{BA} + t_{BA}, \quad (12)$$

wenn man zunächst die Normalbeschleunigung

$$n_B = \frac{v_B^2}{B\mathfrak{B}} = \frac{\overline{o b^2}}{B\mathfrak{B}} = \overline{\pi \beta_0}$$

in Richtung $B\mathfrak{B}$ von π aus aufträgt und dann die Richtung $\beta_0 \beta \perp B\mathfrak{B}$ der Tangentialbeschleunigung t_B durch β_0 zieht. Dadurch erhält man den ersten Ort für den Beschleunigungspunkt β . Reicht man sodann die Normalbeschleunigung

$$n_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{\overline{a b^2}}{BA} = \overline{\alpha \beta_1}$$

in Richtung BA im Beschleunigungsplan an b_A , das ist im Punkte α , nach Richtung und Größe an und zeichnet die Richtung $\beta_1 \beta \perp BA$ der Tangentialbeschleunigung t_{BA} durch β_1 , so ergibt sich der zweite Ort für β . Im Schnitt beider Orte liegt β , der in $\pi \beta = b_B$ liefert. Die Schwerpunktsbeschleunigung $b_s = \pi \vec{\sigma}$ ergibt sich sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\alpha \sigma \beta$ und ASB .

Nun bestimmt man den Impulspol E durch Abtragen der Strecke \overline{SE} auf der Normalen zu b_s in S . Dabei folgt hier \overline{SE} mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{t_{BA}}{AB}$ aus

$$b_s = \overline{SE} \varepsilon = \frac{\overline{SE}}{AB} t_{BA}$$

zu

$$\overline{SE} = \overline{AB} \frac{b_s}{t_{BA}} = \overline{AB} \frac{\pi \sigma}{\beta_1 \beta}. \quad (13)$$

Damit kann der Beschleunigungspolkreis erster Art k_3 und im Schnitt von OE mit k_3 der Punkt N gefunden werden. Der Trägheitspol T ist dann, wie unter III. angegeben wurde, der Gegenpunkt von N bezüglich eines Kreises mit dem Radius i_s um S .

Soll der Trägheitspol T nach einer der ersten drei unter III. angegebenen Methoden bestimmt bzw. kontrolliert werden, dann ist noch die Bestimmung des Kraftpoles K notwendig. Man erhält ihn in Abb. 4 sofort wegen

$$\frac{b_s}{b_1} = \frac{\overline{SK} \omega^2}{\overline{SO} \omega^2} = \frac{\overline{SK}}{\overline{SO}}$$

mit

$$b_1 = n_{so} = \frac{v_{so}^2}{\overline{SO}} = \frac{v_s^2}{\overline{SO}} = \overline{SY}$$

durch Auftragen der Strecke

$$\overline{SK} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SY}} \pi \sigma \quad (14)$$

in Richtung der Schwerpunktsbeschleunigung b_s von S aus.

V. Der Trägheitspol und die Trägheitspolkurve des Kreuzschiebers.

Hier kann die Bestimmung des Trägheitspoles T genau so wie bei der allgemeinen Zweipunktführung mit Hilfe des Punktes N erfolgen. Wie bereits unter III. abschließend erwähnt wurde, liegt N außer auf k_3 auch auf dem Wendekreis k_1 , der hier in Abb. 5 durch die Punkte A , B , O und den Schnittpunkt der beiden Führungsgeraden, das ist aber

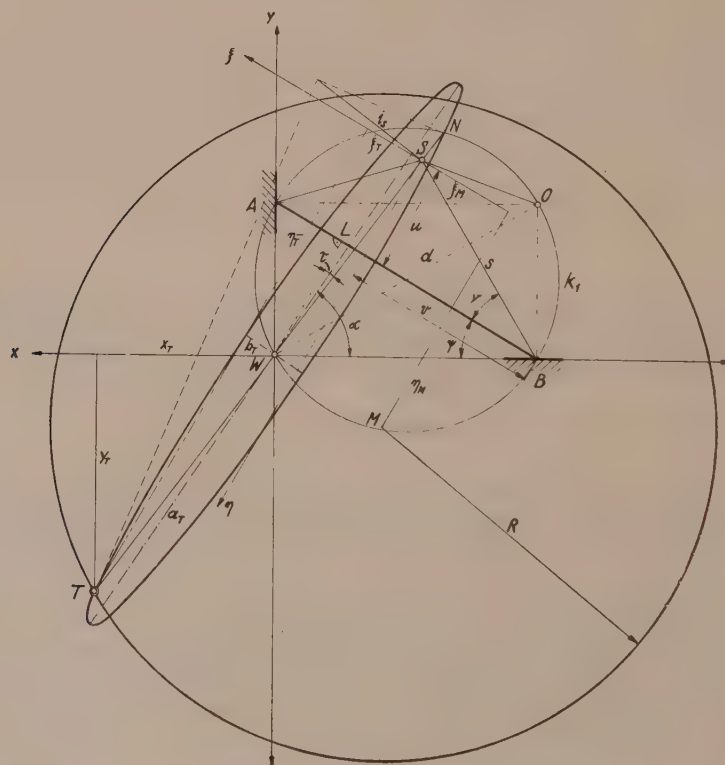


Abb. 5. Die Trägheitspolkurve des Kreuzschiebers.

der Wendepol W , hindurchgeht. Es ist deshalb in diesem Sonderfall einfacher, den Punkt N auf k_1 zu bestimmen und T auf SW als Gegenpunkt von N wie früher zu suchen.

Der Trägheitspol T und die Trägheitspolkurve können beim Kreuzschieber auch nach der von K. Federhofer⁹ angegebenen Beziehung

$$r_T = -r_W \frac{i_s^2}{r_O \cdot r_W} \quad (15)$$

festgelegt werden. Hierin bedeuten r_T , r_W , r_O die von Schwerpunkt S gemessenen Ortsvektoren der Punkte T , W , O und i_s wieder den Trägheitsradius bezüglich des Schwerpunktes. Mit dem Wendekreisdurchmesser $d = \overline{OW}$ geht (15) über in

$$r_T = r_W \frac{2 i_s^2}{d^2 - (r_W^2 + r_O^2)}. \quad (16)$$

Beachtet man die in Abb. 5 eingeführten Bezeichnungen, so ergibt sich aus Dreieck SWB

$$r_W^2 = \overline{SW}^2 = s^2 + l^2 \cos^2 \psi - 2 l s \cos \psi \cos (\psi + \nu)$$

und aus Dreieck SOB

$$r_O^2 = \overline{SO}^2 = s^2 + l^2 \sin^2 \psi - 2 l s \sin \psi \sin (\psi + \nu).$$

Damit und mit Beachtung von $d = l$ wird der Nenner in (16)

$$d^2 - (r_W^2 + r_O^2) = 2 s (l \cos \nu - s)$$

und Gl. (16) lautet

$$r_T = r_W \frac{i_s^2}{s (l \cos \nu - s)}. \quad (16a)$$

Der Winkel τ zwischen \overline{SW} und dem Lot \overline{WL} von W auf \overline{AB} läßt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \cos \tau &= \frac{\overline{WL} + u}{r_W} = \frac{\frac{l}{2} \sin 2\psi + s \sin \nu}{r_W}, \\ \sin \tau &= \frac{\overline{BL} - v}{r_W} = \frac{l \cos^2 \psi - s \cos \nu}{r_W}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gestatten schon die Bestimmung der Koordinaten ξ_T , η_T des Trägheitspoles T bezüglich eines Achsenkreuzes ξ , η durch S . Man erhält für sie

$$\left. \begin{aligned} \xi_T &= r_T \sin \tau = i_s^2 \frac{l \cos^2 \psi - s \cos \nu}{s (l \cos \nu - s)}, \\ \eta_T &= r_T \cos \tau = i_s^2 \frac{\frac{l}{2} \sin 2\psi + s \sin \nu}{s (l \cos \nu - s)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Damit ist die Trägheitspolkurve im bewegten System in Parameterdarstellung gegeben.

Sie ist ein Kreis vom Radius $R = \frac{i_s^2 l}{2 s (l \cos \nu - s)}$, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \xi_M &= i_s^2 \frac{l - 2 s \cos \nu}{2 s (l \cos \nu - s)}, \\ \eta_M &= i_s^2 \frac{\sin \nu}{l \cos \nu - s} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

⁹ Siehe Fußnote ⁶, S. 242.

hat. Im festen System x, y sind nach Abb. 5 die Koordinaten des Trägheitspoles T

$$x_T = \eta_T \sin \psi + \xi_T \cos \psi - l \cos \psi + s \cos (\psi + \nu),$$

$$y_T = \eta_T \cos \psi - \xi_T \sin \psi - s \sin (\psi + \nu)$$

und mit Beachtung von (17)

$$\left. \begin{aligned} x_T &= c [l \cos \psi - s \cos (\psi + \nu)], \\ y_T &= c_s \sin s (\psi + \nu), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei $c = \frac{i_s^2}{s(l \cos \nu - s)} - 1$ bedeutet.

Man erkennt, daß die Trägheitspolkurve im festen System eine Ellipse ist. Ihr Mittelpunkt ist der Wendepol W und die Größen der Halbachsen erhält man nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$a_T = c \bar{a}_T, \quad b_T = c \bar{b}_T$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_T &= \sqrt{s^2 + \frac{l^2}{2} - l s \cos \nu + \frac{l}{2} \sqrt{l^2 - 4 l s \cos \nu + 4 s^2}}, \\ \bar{b}_T &= \sqrt{s^2 + \frac{l^2}{2} - l s \cos \nu - \frac{l}{2} \sqrt{l^2 - 4 l s \cos \nu + 4 s^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Neigung der großen Achse ist durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 s \sin \nu}{l - 2 s \cos \nu} \quad (21)$$

bestimmt.

Ist in (17) und (19) $l \cos \nu = s$, dann fällt der Schwerpunkt S mit dem Punkt N zusammen und T liegt im Unendlichen.

Für den Sonderfall, daß der Schwerpunkt S im Abstände $s = \frac{l}{2}$ auf $A \bar{B}$ liegt, ist wegen $\nu = 0$ die Trägheitspolkurve im bewegten System ein Kreis um S mit dem Radius $R = \frac{2 i_s^2}{l}$, während sich für das feste System ebenfalls ein Kreis um W mit dem Radius $R_1 = \frac{2 i_s^2}{l} - \frac{l}{2}$ ergibt.

Der Radius $R_1 = 0$ für $i_s = \frac{l}{2}$. Dann schrumpft die Trägheitspolkurve im festen System in den Wendepol W zusammen. Ist $i_s < \frac{l}{2}$, dann liegt der Trägheitspol T auf SW zwischen S und W , während er für $i_s > \frac{l}{2}$ außerhalb von SW angeordnet ist.

Ein weiterer Spezialfall folgt mit S auf $\bar{A \bar{B}}$ in $s = \frac{l}{2}$ und $i_s = \frac{l}{\sqrt{12}}$. Dann sind die Trägheitspolkurven Kreise um S mit $R = \frac{l}{6}$ und um W mit $R_1 = \frac{l}{3}$.

Man erkennt aus diesen Betrachtungen, daß die Lage des Trägheitspoles T beim Kreuzschieber außer vom Trägheitsradius i_s abhängig ist von der Entfernung der geführten Systempunkte A, B , von der Lage des Schwerpunktes S und vom Neigungswinkel ψ der Strecke $\bar{A \bar{B}}$ gegen die Führung von B .

(Eingegangen am 23. März 1955.)

Beitrag zum hydraulischen Verzweigungsproblem.

Erster Teil.

Von H. Winter, Graz.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das hydraulische Verzweigungsproblem behandelt bekanntlich die Aufspaltung eines Flüssigkeits- oder Gasstromes in einzelne Teilströme bzw. die Vereinigung und Abführung von Teilströmen in einem Sammler, sowie die Verbindung dieser beiden Fragestellungen. Da insbesondere die Frage der Verteilung bisher keine befriedigende Lösung gefunden hat, wird im folgenden I. Teilbericht ein Weg angegeben, der für eine spezielle Form des Verteilers zu einem befriedigenden Ergebnis geführt hat, prinzipiell aber auch auf anders gelagerte Fälle anwendbar ist und eine Erweiterung auf das vollständige Verzweigungsproblem ermöglicht. (II. Teilbericht.)

Summary. As is well known, the hydraulic branching problem deals with the splitting of a liquid or gas stream into partial streams, or the fusion and discharge of partial streams into a reservoir, as well as with the combination of these two problems. Since it is the distribution problem in particular that has not found a satisfying solution until now, a way is shown in the subsequent first partial report of solving this problem for a particular form of the distributor for which it has given satisfying results. Being applicable on principle to other cases also, this method will allow an extension to the complete branching problem. (Second partial report.)

Résumé. Le problème de la ramification hydraulique traite, comme on le sait, du partage d'un courant liquide ou gazeux en plusieurs courants partiels, et du rassemblement et de l'écoulement des courants partiels dans un seul collecteur, ainsi que du rapport de ces deux questions. La question de la distribution, en particulier, n'ayant trouvé jusqu'ici aucune solution satisfaisante, on indique ci-dessous dans la première partie du rapport une méthode qui, dans le cas d'une forme particulière de distributeur, a conduit à des résultats satisfaisants, mais est également applicable en principe à des cas d'un genre différent, et permet d'élargir le problème à celui de la ramification complète. (Deuxième partie du rapport.)

I. Einleitung.

Das hydraulische Verzweigungsproblem war im Hinblick auf seine Bedeutung für den Kessel- und Wärmetauscherbau, ferner für den Parallelbetrieb von Öfen, Trocknern u. dgl. in den letzten Jahren mehrfach Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen. Von den einschlägigen Arbeiten seien insbesondere erwähnt: Die im Föttinger Institut, Berlin, allerdings schon vor längerer Zeit durchgeführten, vorwiegend experimentellen Untersuchungen¹, ferner eine Arbeit von J. D. Keller, Pittsburg², und schließlich die Untersuchungen von Reichardt und Tollmien, Göttingen³. Die Grundfälle des Verzweigungsproblems sind in Abb. 1 dargestellt. Im einzelnen handelt es sich um die Ermittlung der Austrittsgeschwindigkeiten v_i aus einer Anzahl von Öffnungen oder Ansatzrohren bzw. aus einem Spalt längs eines Verteilerrohres (1a), desgleichen um die Verteilung der Einstromgeschwindigkeit in einen Sammler (1b) und schließlich um die beiden möglichen Kombinationen gemäß Abb. 1c und 1d.

Der in Abb. 1a angedeutete, in Strömungsrichtung ansteigende Verlauf der Austrittsgeschwindigkeit v_i aus den gleichartigen Abzweigungen eines Verteilers ist eine bekannte Erscheinung. Die hierfür unter anderem auch in ² gegebene Erklärung aus der Zunahme des statischen Druckes infolge Verzögerung der Strömung im Verteilerrohr, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Reibung und einer unveränder-

¹ H. Föttinger: Strömung in Dampfkesselanlagen. Mitt. d. Ver. d. Großkesselbesitzer H. 73, 167 (1939). — Vgl. hierzu auch H. Paul: Entwicklungen im Dampfkesselbau. Z. Ver. dtsh. Ing. 88, 89 (1944).

² J. D. Keller: The Manifold Problem. J. Appl. Mechan. 16, 77 (1949).

³ H. Reichardt und W. Tollmien: Die Verteilung der Durchflußmenge in einem ebenen Verzweigungssystem. Mitt. aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Nr. 7 (1952).

lichen Kontraktionsziffer an den Abzweigen, ist jedoch unbefriedigend. Für die Ausströmgeschwindigkeit ist vielmehr der in Strömungsrichtung unveränderliche bzw. bei Berücksichtigung der Reibung abnehmende Gesamtdruck im Verteiler maßgebend, worauf bereits in ³ hingewiesen wurde. Ohne Berücksichtigung der Reibung im Verteilerrohr ergäbe sich demnach eine konstante, mit Reibung eine in Strömungsrichtung

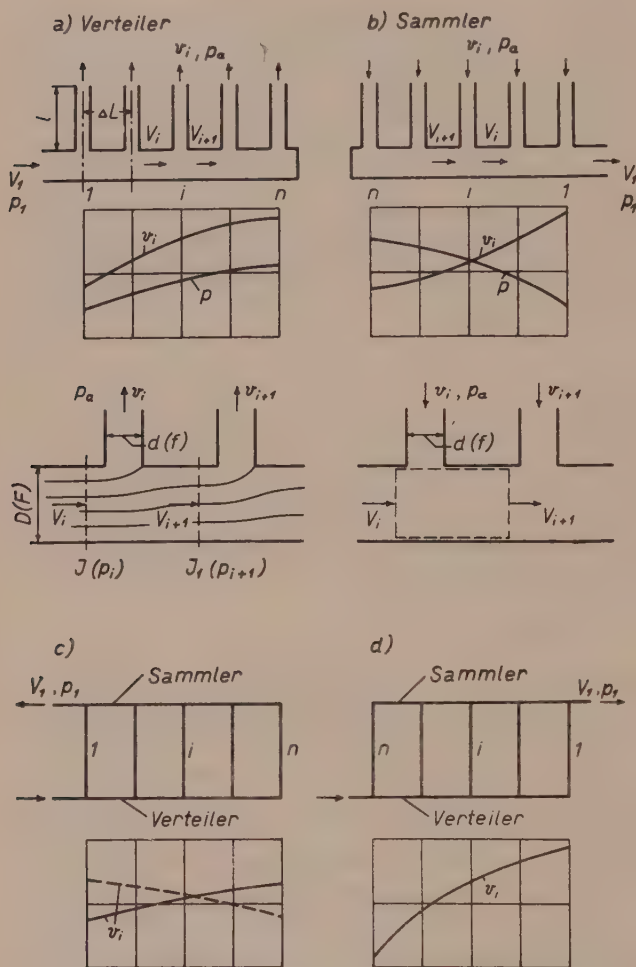


Abb. 1. Grundfälle des Verzweigungsproblems.
In der Nebenfigur zu 1 b sind die Bezeichnungen v_{i+1} und V_{i+1} durch v_{i-1} und V_{i-1} zu ersetzen.

statischen Druckes in Strömungsrichtung. An den stromabwärts gelegenen Öffnungen des Sammlers herrscht daher ein größeres Druckgefälle, die Einströmgeschwindigkeiten nehmen somit in Strömungsrichtung zu.

Unter Berücksichtigung der beiden Grundfälle erscheint es verständlich, daß ein vollständiges Verzweigungssystem gemäß Abb. 1 d eine wesentlich ungleichmäßigere Beaufschlagung der Verbindungsrohre liefert als die Anordnung 1 c. Bei letzterer bewirkt der tiefere Druck im Sammler an der Mündung der ersten Rohre eine Vergleichmäßigung des Durchsatzes gegenüber 1 a, in der Regel sogar (gestrichelt angedeutet) eine Umkehr der Durchflußverteilung im Sinne von 1 b. Bei der Anordnung 1 d summieren sich die Effekte gemäß 1 a und b und ergeben ein starkes Anwachsen

sogar abnehmende Verteilung der Austrittsgeschwindigkeit. Beide Aussagen widersprechen jedoch der Erfahrung. Nur in jenen Fällen, bei denen die Summe der Auslaßquerschnitte $n f$ kleiner ist als der Verteilerquerschnitt F , ergibt sich, wie die Versuche von Reichardt und Tollmien gezeigt haben, tatsächlich eine ziemlich gleichförmige Austrittsverteilung. Dazu ist allerdings zu bemerken, daß diese Versuche mit einer Einrichtung ausgeführt wurden, bei der angenähert ebene Strömung vorlag und bei der die Übergänge zu den Abzweigungen sorgfältig abgerundet waren. Die folgenden Ausführungen beziehen sich hingegen auf Kreisrohre mit scharfkantigen Übergängen.

Für die in Strömungsrichtung ebenfalls zunehmende Einströmgeschwindigkeit in einen „Sammler“ gemäß Abb. 1 b wird in ³ eine Erklärung gegeben. Es wird hierbei angenommen, daß die etwa durch ein senkrecht zum Sammler stehendes Rohr einströmende Menge der Hauptströmung keinen nennenswerten axialen Impuls zuführt. Unter dieser Voraussetzung liefert der Impulssatz, angewandt auf die in der Nebenfigur von Abb. 1 b (gestrichelt) angedeutete Kontrollfläche einen Abfall des

des Durchflusses durch die Verbindungsrohre in Richtung der Einstromung in den Verteiler. Die in ¹ und ³ mitgeteilten Meßergebnisse, die an Versuchsanordnungen ähnlich 1 c und d gewonnen wurden, bestätigten diese Überlegungen. Eine eingehende Nachprüfung der von Reichardt und Tollmien angewandten Berechnungsmethode für den Sammler hat gezeigt, daß diese auch für kreisförmige Strömungsquerschnitte anwendbar ist, solange das Verhältnis: Querschnittsfläche des Ansaugrohres bzw. der Bohrung zur Fläche des Sammlers gewisse Grenzen nicht überschreitet. Auf diese Frage, ebenso wie auf das vollständige Verzweigungsproblem soll jedoch erst in einem zweiten Teilbericht näher eingegangen werden, während sich der vorliegende Bericht lediglich mit der Frage des Verteilers befaßt, die bisher keine befriedigende Lösung gefunden hat.

II. Bezeichnungen.

- D, F Durchmesser bzw. Querschnittsfläche des Verteilers.
 d, f Durchmesser bzw. Querschnittsfläche der Abzweigrohre.
 ΔL Abstand der Abzweigrohre.
 l Länge der Abzweigrohre.
 L_s, b Länge bzw. Breite des Ersatzspaltes.
 n Anzahl der Abzweigungen.
 V_1 Eintrittsgeschwindigkeit in den Verteiler.
 V_i, V_{i+1} Mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Verteiler vor dem Abzweigrohr i bzw. $i + 1$.
 v_i Austrittsgeschwindigkeit aus dem Abzweigrohr i .
 $Q = V_1 F$ Veränderlicher Durchfluß durch den Verteiler.
 $q = v_i f$ Im Querschnitt i abgezweigte Menge.
 ρ Dichte.
 p_g Gesamtdruck am Eintritt in den Verteiler gegen den Außendruck p_a gemessen.
 p_i Statischer Druck im Verteiler vor der Abzweigung i .
 ζ_{Ti} Beiwert des Trennungsverlustes bei der Abzweigung i .
 k, m bzw. a_0, a_1, a_2 Koeffizienten der Näherungsformeln (1 a) bzw. (1 b).
 ζ_D Beiwert des Erweiterungsverlustes im Verteiler hinter einer Abzweigung.
 λ_R, λ_r Reibungsbeiwerte im Verteiler bzw. Abzweigrohr

$$\beta^2 = \left(\frac{F}{f}\right)^2 \left(1 + \lambda_r \frac{l}{d}\right); \quad m_r = m \left(\frac{f}{F}\right)^2 + \lambda_r \frac{l}{d}; \quad P = \frac{p_g}{\frac{\rho}{2} V_1^2}.$$

III. Verlustquellen der Verteilerströmung.

a) Trennungsverlust.

Von den verschiedenen Verlustquellen sei zunächst jene näher behandelt, die bei einem einfachen Verteiler gemäß Abb. 1 a mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt und gleichem Durchmesser der Auslässe sowie scharfkantigen Übergängen zu der dort angedeuteten Verteilung der Austrittsgeschwindigkeit v_i führt. Wie schon erwähnt, würde sich bei verlustloser Strömung eine gleichförmige Verteilung, bei Berücksichtigung der Reibung im Verteilerrohr eine den Erfahrungen widersprechende, in Richtung der Zustromung abnehmende Verteilung ergeben. Die tatsächliche Form der Ausflußkurve ist demnach nur aus der Veränderlichkeit des Verlustes zu erklären, den die einzelnen Teilströme bei der Umlenkung von der Hauptströmungsrichtung in die dazu senkrechte Richtung erfahren (Trennungsverlust).

In dem in Abb. 2 skizzierten Stromlinienbild sind die Flächen f_1, f_2 usw. verhältnismäßig dem Anteil des jeweiligen Gesamtstromes im Verteiler, der im nächstfolgenden Auslaß abgezweigt wird. Bei gleichmäßiger Austrittsverteilung v_i würde

das Verhältnis f_i/f bei n Abzweigen, von F/nf auf F/f zunehmen. Im umgekehrten Verhältnis würde die mittlere Durchflußgeschwindigkeit V_i im Verteiler in Strömungsrichtung abnehmen. Solange das Verhältnis $f_i/f = v_i/V_i$ im Bereich 0 bis 1 liegt, was für die ersten Abzweigungen zutreffen kann, handelt es sich beim Trennungsverlust im wesentlichen um einen Umlenkverlust ähnlich dem in einer erweiterten Umlenkecke. Bezogen auf den Staudruck der Strömungsgeschwindigkeit im Verteiler vor der Abzweigung, hat der Beiwert ζ_{Ti} dieses Umlenkverlustes, wie später noch näher ausgeführt wird, die Größenordnung 1. Mit wachsendem $f_i/f (> 1)$ erfolgt die Einströmung in das Abzweigrohr beschleunigt unter Druckabfall. Der dabei auftretende Gesamtdruckverlust ist vergleichbar mit dem bei unvollkommener Kontraktion, allerdings in Verbindung mit einer Umlenkung. Wird auch dieser Kontraktionsverlust entgegen der sonstigen Gepflogenheit auf den Staudruck der



Abb. 2. Stromlinienverlauf der Verteilerströmung.

Zuströmung bezogen, dann ergibt sich ein starkes Anwachsen des Verlustbeiwertes mit zunehmendem f_i/f . Die Abnahme des Staudruckes im Verteilerrohr überwiegt jedoch die Zunahme des Verlustbeiwertes, so daß der Trennungsverlust

$$\Delta p_i = \zeta_{Ti} \frac{\rho}{2} V_i^2$$

in Strömungsrichtung abnimmt. Für einen konstanten, gegen den Außendruck p_a gemessenen Gesamtdruck p_g im Verteilerrohr, das heißt unter Vernachlässigung sonstiger Verluste, ergibt sich aus

$$p_g = \frac{\rho}{2} v_i^2 + \Delta p_i$$

zwangsläufig eine in Strömungsrichtung zunehmende Ausflußverteilung v_i . Alle übrigen Widerstände im Verteilerrohr bzw. in den Abzweigen (sofern letztere untereinander gleich sind) wirken dem auf die Trennung zurückführenden Effekt entgegen und daher im Sinne einer Vergleichsmäßigung der Austrittsverteilung.

Über die Größe des bei einer einzelnen Abzweigung von einer längeren Rohrleitung auftretenden Verlustes liegen einige Messungen vor⁴. Dieses Material enthält unter anderem für verschiedene Flächenverhältnisse f/F in kurvenmäßiger Darstellung den Beiwert des Trennungsverlustes in Abhängigkeit vom Mengenverhältnis q/Q (abgezweigte Menge/Menge vor der Abzweigung), wobei auch verschiedene Ausführungen der Abzweigung ohne oder mit Abrundung u. dgl. untersucht wurden. Außerdem wurde festgestellt, daß der Verlust infolge Erweiterung der Stromlinien zwischen zwei Abzweigungen im Verteiler verhältnismäßig klein ist, wobei allerdings die Meßergebnisse ziemlich streuen. Da die in ⁴ mitgeteilten Beiwerte des Trennungsverlustes insbesondere bei $q/Q = 1$ unwahrscheinlich hoch und weit über jenen bei vollkommener Kontraktion liegen, wurden für den vorliegenden Zweck eigene Meß-

⁴ G. Vogel: Untersuchungen über den Verlust in rechtwinkligen Rohrverzweigungen. Mitt. des hydr. Institutes der T. H. München, H. I, 75 (1926); H. II, 61 (1928).

reihen zur Bestimmung von ζ_{Ti} in Abhängigkeit vom Mengenverhältnis q/Q für verschiedene Flächenverhältnisse f/F durchgeführt.

Die durch Messungen an einer einzelnen Abzweigung gewonnenen Verlustbeiwerte werden für die Berechnung der Austrittsgeschwindigkeiten längs eines Verteilers zweifelsohne dann verwertbar sein, wenn jeweils vor der nächsten Abzweigung das Geschwindigkeitsprofil wieder einigermaßen ausgeglichen und der aus der Verzögerung von V_i auf V_{i+1} resultierende Druckanstieg abgeschlossen ist. Es darf daher das Abstandsverhältnis $\Delta L/D$ gewisse Grenzen nicht unterschreiten, anderseits wird bei festgehaltenen Durchmesser- und Längenverhältnissen die Übereinstimmung mit der Berechnung bei einer größeren Zahl von Auslässen besser sein als bei weniger Abzweigungen, da im letzteren Fall die Verzögerung zwischen je zwei Auslässen relativ größer ist. Bei kleinem $\Delta L/D$ und einer geringen Zahl von Auslässen wird der Geschwindigkeitsverlauf gegenüber dem berechneten gleichförmiger sein. Den Grenzfall, bei dem trotz Umlenkverlust die Geschwindigkeitsverteilung gleichmäßig ist, bildet ein Verteiler mit sternförmigen Abzweigungen in einer Ebene.

Die Bestimmung des Trennungsverlustes für eine einzelne Abzweigung erfolgte mit einer einfachen Versuchseinrichtung. An ein Gebläse wurde unter Zwischenschaltung einer Beruhigungsstrecke und einer Meßdüse ein Rohr ($D = 48$ mm, $L = 500$ mm) angeschlossen, an dessen Ende verschieden große Düsen angesetzt werden konnten. Etwa in der Mitte des mit Druckmeßstellen versehenen Rohres D wurde ein einzelnes Abzweigrohr angelötet. Je nach Größe dieses Abzweigrohres konnte das Flächenverhältnis f/F im Bereich $\frac{1}{16}$ bis 1 verändert werden. Das Längenverhältnis l/d des Abzweigrohres wurde so groß gewählt, daß die austretende Strömung weitgehend ausgeglichen war. Je nach Stärke der Drosselung durch die schon erwähnten Ansatzdüsen stellten sich bei einem festen Flächenverhältnis f/F verschiedene Mengenverhältnisse $\frac{q}{Q} = \frac{v_i f}{V_i F}$ ein.

Mit den Bezeichnungen der Nebenfigur der Abb. 1 a ist der Beiwert ζ_{Ti} des Trennverlustes, bezogen auf $\frac{\rho}{2} V_i^2$, durch nachstehende Gleichung definiert:

$$p_i + \frac{\rho}{2} V_i^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_i^2 + \zeta_{Ti} \frac{\rho}{2} V_i^2.$$

Bei seiner Bestimmung aus den beiden Düsenmessungen und der Druckdifferenz $p_i - p_a$ wurde der Reibungsverlust im Abzweigrohr entsprechend berücksichtigt. ζ_{Ti} beinhaltet demnach ausschließlich den Trennungsverlust, allerdings unter der Voraussetzung, daß der Austritt aus dem Verteiler nicht durch eine einfache Öffnung, sondern durch ein Rohr erfolgt, in dem ein gewisser Druckrückgewinn durch Vergleichmäßigung der Strömung erzielbar ist.

Das Ergebnis einer solchen Verlustmessung, und zwar ζ_{Ti} abhängig von q/Q für ein Flächenverhältnis $f/F = 0.338$, zeigt Abb. 3. Bei kleinem q/Q beträgt der Verlustbeiwert ungefähr 1 und steigt dann längs einer parabelähnlichen Kurve an, die für die weiteren Berechnungen durch den Ansatz

$$\zeta_{Ti} = 1 + 3.05 \left(\frac{q}{Q} \right)^2$$

angenähert wird. Wegen $q/Q = 1 - \frac{V_{i+1}}{V_i}$ kann auch gesetzt werden:

$$\zeta_{Ti} = 4.05 - 6.10 \frac{V_{i+1}}{V_i} + 3.05 \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} \right)^2.$$

In Abb. 3 ist vergleichsweise der Verlauf des Verlustbeiwertes eingetragen, der sich bei unvollkommener Kontraktion und für $\frac{f_i}{f} = \frac{F q}{f Q} > 1$, allerdings ohne Um-

lenkung, mit den Weisbachschen Werten der Kontraktionszahl ergeben würde. Schließlich ist noch eine Kurve, die mit einer unveränderlichen Kontraktionszahl $\alpha = 0.60$ gerechnet wurde, in Abb. 3 eingetragen. Der gemessene ζ_{Ti} -Verlauf zeigt

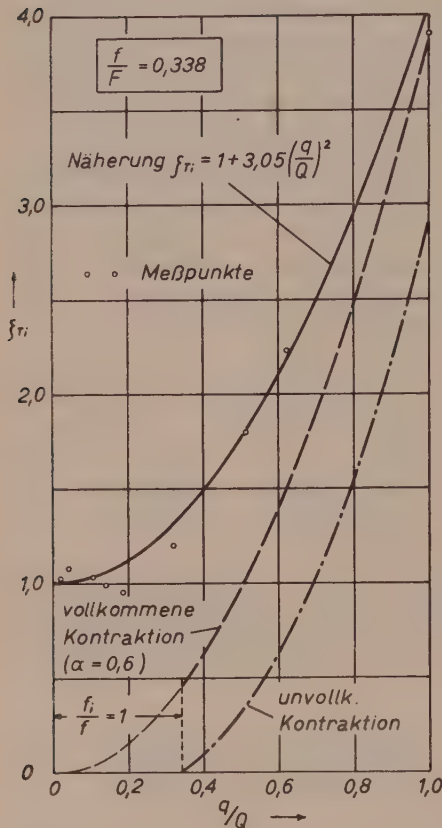


Abb. 3. Beiwert des Trennungsverlustes ζ_{Ti} in Abhängigkeit vom Mengenverhältnis q/Q für $f/F = 0.338$.

die stärksten Abweichungen von den reinen Kontraktionsverlusten im unteren Bereich von q/Q , in dem die Verluste vor allem auf die Umlenkung von der Hauptströmung in die dazu senkrechte Richtung zurückzuführen sind. Bei $q/Q = 1$ nähern sich die Meßwerte der mit $\alpha = 0.6$ gerechneten Verlustkurve infolge Kontraktion.

In ähnlicher Weise konnten auch für andere Flächenverhältnisse f/F die Beiwerte des Trennungsverlustes durch Ansätze der Form

$$\zeta_{Ti} = k + m \left(\frac{q}{Q} \right)^2 = k + m \left(\frac{f}{F} \right)^2 \left(\frac{v_i}{V_i} \right)^2 \quad (1a)$$

bzw.

$$\zeta_{Ti} = a_0 + a_1 \frac{V_{i+1}}{V_i} + a_2 \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} \right)^2 \quad (1b)$$

dargestellt werden. In Tabelle 1 sind die Zahlenwerte der in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Koeffizienten für verschiedene Flächenverhältnisse zusammengestellt. Für die mit * bezeichneten Flächenverhältnisse liegen Messungen vor, für die übrigen wurden die Koeffizienten interpoliert.

Bei sehr kleinen Flächenverhältnissen ($f/F \leq 0.1$) ist die Annäherung von ζ_{Ti} durch den Ansatz (1a) unzureichend. Die m -Werte sind daher in den betreffenden Spalten eingeklammert. Der dreigliedrige Ansatz (1b) ist jedoch auch für kleine Flächenverhältnisse ausreichend genau.

Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß für nicht scharfkantige Abzweigungen die Zahlen-

Tabelle 1. Koeffizienten der Näherungsansätze (1a) und (1b) für ζ_{Ti} .

f/F	k	m	a_0	a_1	a_2
1.000*	0.860	0.430	1.290	— 0.860	0.430
0.900	0.865	0.513	1.378	— 1.026	0.513
0.800	0.875	0.626	1.501	— 1.252	0.626
0.700	0.890	0.788	1.678	— 1.576	0.788
0.600	0.910	1.033	1.943	— 2.066	1.033
0.532*	0.920	1.280	2.200	— 2.560	1.280
0.500	0.928	1.430	2.358	— 2.860	1.430
0.400	0.970	2.183	3.153	— 4.366	2.183
0.338*	1.0	3.05	4.05	— 6.10	3.05
0.300	1.0	3.90	4.90	— 7.80	3.90
0.200	1.0	9.10	10.10	— 18.20	9.10
0.141*	1.0	19.00	20.00	— 38.00	19.00
0.100	1.0	(40)	40.24	— 75.71	36.47
0.0976*	1.0	(41.7)	42.31	— 79.37	38.06
0.0625*	1.0	(120)	114.0	— 199.7	86.7
0.0500	1.0	(207)	184.5	— 315.8	132.3

werte der obigen Tabelle eine Veränderung im Sinne einer Verringerung von ζ_{Ti} erfahren werden, worauf unter Bezugnahme auf³ bereits hingewiesen wurde.

b) Sonstige Verluste.

Der auf die Verzögerung der Strömung im Verteiler hinter jedem Abzweig zurückzuführende Gesamtdruckverlust, ausgedrückt durch den Beiwert

$$\zeta_D = \frac{\Delta p_g}{\frac{\rho}{2} [V_i^2 - V_{i+1}^2]}$$

ist durch Versuche, zumal bei kleinem q/Q , nur angenähert bestimmbar. ζ_D schwankt zwischen 0,05 und 0,10, liegt somit etwas niedriger als bei einem normalen Diffusor. Bei den Zahlenbeispielen im Abschnitt VI wird mit dem konstanten Beiwert $\zeta_D = 0,10$ gerechnet. Sein Einfluß auf den Geschwindigkeitsverlauf ist nicht beträchtlich.

Die Reibungsverluste im Verteiler und in den Abzweigrohren werden durch die Beiwerte λ_R und λ_r berücksichtigt. Der Reibungsverlust im Verteiler spielt bei geringen Abständen ΔL der Abzweige keine wesentliche Rolle. Bei sehr großen Abständen überwiegt er hingegen den Einfluß des Trennungsverlustes, so daß es dann unter Umständen genügt, für letzteren einen konstanten Beiwert in Rechnung zu setzen⁵.

IV. Ausströmen aus n Rohren längs eines Verteilers mit unveränderlichem Querschnitt.

Die Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit aus den n Abzweigrohren des Verteilers erfolgt unter Berücksichtigung der unter III a und b aufgezählten Verluste.

Verteilerströmung zwischen J und J_1 (Nebenfigur zu Abb. 1 a) mit Reibungs- und Verzögerungsverlust:

$$p_i + \frac{\rho}{2} V_i^2 = p_{i+1} + \frac{\rho}{2} V_{i+1}^2 \left(1 + \lambda_R \frac{\Delta L}{D} \right) + \zeta_D \frac{\rho}{2} (V_i^2 - V_{i+1}^2). \quad (2a)$$

Abzweig nach J unter Berücksichtigung von Reibungs- und Trennungsverlust:

$$p_i + \frac{\rho}{2} V_i^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_i^2 \left(1 + \lambda_r \frac{l}{d} \right) + \zeta_{Ti} \frac{\rho}{2} V_i^2 \quad (2b)$$

mit ζ_{Ti} gemäß Ansatz (1 b). Abzweig nach J_1 :

$$p_{i+1} + \frac{\rho}{2} V_{i+1}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_{i+1}^2 \left(1 + \lambda_r \frac{l}{d} \right) + \zeta_{Ti+1} \frac{\rho}{2} V_{i+1}^2 \quad (2c)$$

mit

$$\zeta_{Ti+1} = a_0 + a_1 \frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} + a_2^2 \left(\frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} \right)^2.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen werden die Drücke eliminiert, und die Geschwindigkeiten in den Abzweigrohren ersetzt durch:

$$v_i = \frac{F}{f} (V_i - V_{i+1}); \quad v_{i+1} = \frac{F}{f} (V_{i+1} - V_{i+2}). \quad (3a)$$

Die so entstehende Beziehung zwischen V_i , V_{i+1} und V_{i+2} wird mit V_i dimensionslos gemacht. Unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$\frac{V_{i+2}}{V_i} = \frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} \frac{V_{i+1}}{V_i}; \quad \frac{V_{i+1} V_{i+2}}{V_i^2} = \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} \right)^2 \frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} \quad (3b)$$

und mit

$$\beta^2 = \left(\frac{F}{f} \right)^2 \left(1 + \lambda_r \frac{l}{d} \right)$$

⁵ K. Federhofer: Aufgaben aus der Hydromechanik, VIII, Nr. 10. Wien: Springer-Verlag. 1954.

ergibt sich schließlich die quadratische Rekursionsgleichung:

$$\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)^2 \left[K_1 + K_2 \frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} + K_3 \left(\frac{V_{i+2}}{V_{i+1}}\right)^2 \right] + K_4 \frac{V_{i+1}}{V_i} + K_5 = 0 \quad (4)$$

mit den Konstanten:

$$\begin{aligned} K_1 &= a_0 - a_2 - \zeta_D + \lambda_R \frac{\Delta L}{D}; \\ K_2 &= a_1 - 2\beta^2; \quad K_3 = a_2 + \beta^2; \quad K_4 = 2\beta^2 - a_1; \quad K_5 = -a_0 - \beta^2 + \zeta_D \\ &\quad (a_0, a_1, a_2 \text{ siehe Tabelle 1}). \end{aligned}$$

Die Ausrechnung der Verhältnisse aufeinanderfolgender Geschwindigkeiten im Verteiler bei n Abzweigen erfolgt ausgehend vom „toten Ende“ entgegen der Strömungsrichtung, da für $i = n - 1$ $\frac{V_{i+2}}{V_{i+1}} = \frac{V_{n+1}}{V_n} = 0$ ist, und daher aus Gl. (4) $\frac{V_{i+1}}{V_i} = \frac{V_n}{V_{n-1}}$ bestimmt werden kann. Die Geschwindigkeitsverhältnisse in den weiteren Abschnitten lassen sich dann jeweils unter Verwendung des vorausgegangenen Wertes berechnen, wobei allerdings wegen der später erforderlichen Differenzbildung eine etwas größere Rechengenauigkeit erforderlich ist. Sind für sämtliche Abschnitte die Verhältnisse $\frac{V_{i+1}}{V_i}$ ermittelt, so können, beginnend mit $i = 1$ bzw. $\frac{V_2}{V_1}$, die Verhältnisse $\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_4}{V_1}$ usw., und schließlich aus:

$$\frac{v_i}{V_1} = \frac{F}{f} \left(\frac{V_i}{V_1} - \frac{V_{i+1}}{V_1} \right) \quad (5)$$

die Geschwindigkeiten in den Abzweigen berechnet werden. Ist die Berechnung von $\frac{V_{i+1}}{V_i}$ für n Abzweige durchgeführt, so können diese Verhältniszahlen auch für einen Verteiler mit einer geringeren Zahl von Abzweigen verwendet werden, wobei lediglich, ausgehend von „totem Ende“, die Bezifferung sinngemäß zu ändern ist.

V. Ersatz der Einzelabzweige durch einen Längsspalt.

Näherungsweise läßt sich der Verlauf der Austrittsgeschwindigkeiten längs eines Verteilers in der Weise berechnen, daß man die Einzelabzweige durch einen Spalt von der Länge $L_s = n \Delta L$ und der Breite b ersetzt, dabei aber dieselben Trennungsverluste wie bei einzelnen Abzweigen in Rechnung setzt. Sehr einfach wird die Berechnung, wenn man die Verluste im Verteiler selbst vernachlässigt, das heißt dort einen unveränderlichen Gesamtdruck p_g voraussetzt, während den Trennungsverlusten einschließlich der Reibungs- oder sonstiger Verluste in den Abzweigrohren unter Verwendung von (1a) durch den Beiwert

$$\zeta = \zeta_{Ti} + \lambda_r \frac{l}{d} \left(\frac{v_i}{V_i} \right)^2 = k + m_r \left(\frac{v_i}{V_i} \right)^2$$

Rechnung getragen wird. Hierbei wurde

$$m_r = m \left(\frac{f}{F} \right)^2 + \lambda_r \frac{l}{d}$$

gesetzt.

Werden die längs des Spaltes mit x stetig veränderlichen Geschwindigkeiten (unter Weglassung von i) mit V und v bezeichnet, dann gelten folgende Beziehungen:

$$-F dV = b v dx \quad (6)$$

und

$$p_g = p_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 - p_a = \frac{\rho}{2} v^2 + \zeta \frac{\rho}{2} V^2 = \frac{\rho}{2} v^2 (1 + m_r) + k \frac{\rho}{2} V^2. \quad (7)$$

Mit $P = \frac{p_g}{\frac{\rho}{2} V_1^2}$ liefert Gl. (7):

$$\frac{v}{V_1} = \sqrt{\frac{P}{1+m_r}} \sqrt{1 - \frac{k}{P} \left(\frac{V}{V_1}\right)^2}. \quad (8)$$

Die Gl. (6) und (8) führen auf die einfache Differentialgleichung

$$-\frac{b}{F} dx = \sqrt{\frac{1+m_r}{P}} \frac{d\frac{V}{V_1}}{\sqrt{1 - \frac{k}{P} \left(\frac{V}{V_1}\right)^2}}.$$

Aus ihrer allgemeinen Lösung

$$-\frac{b}{F} x = \sqrt{\frac{1+m_r}{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{P}} \frac{V}{V_1} + K$$

folgt mit $\frac{V}{V_1} = 0$ für $x = L_s$ und unter der Voraussetzung, daß der Spalt n Abzweige von der Größe f ersetzen soll, das heißt mit $b L_s = n f$:

$$\sqrt{\frac{k}{P}} \frac{V}{V_1} = \sin \left[\sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \left(-\frac{b x}{F} + \frac{n f}{F} \right) \right].$$

Es ist ferner $\frac{V}{V_1} = 1$ für $x = 0$ und daher:

$$\sqrt{\frac{k}{P}} = \sin \left(\sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \frac{n f}{F} \right).$$

Die beiden letzten Gleichungen in (8) eingesetzt, ergeben:

$$\frac{v}{V_1} = \sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \frac{\cos \left[\sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \left(-\frac{b x}{F} + \frac{n f}{F} \right) \right]}{\sin \left[\sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \frac{n f}{F} \right]}, \quad (9)$$

somit einen Verlauf der Austrittsgeschwindigkeiten längs des Spaltes nach einem einfachen cos-Gesetz. Der Anstieg ist etwas steiler als der sich unter Berücksichtigung der Reibung und des Erweiterungsverlustes im Verteiler aus Gl. (4) bzw. (5) ergebende.

Für eine bestimmte Zahl n_k von Abzweigen liefert Gl. (9) eine an der Stelle $x = 0$ mit $v = 0$ beginnende Geschwindigkeitsverteilung, wenn

$$\sqrt{\frac{k}{1+m_r}} \cdot \frac{n_k f}{F} = \frac{\pi}{2},$$

bzw.

$$n_k = \frac{\pi}{2} \frac{F}{f} \sqrt{\frac{1+m_r}{k}} \quad (10)$$

ist.

Ist die Zahl der Auslässe $n > n_k$ (bzw. als die darauffolgende ganze Zahl), dann erfolgt durch die ersten $n - n_k$ Rohre kein Ausfluß. Der statische Druck p an diesen Abzweigen ist gleich dem Außendruck p_a . Von der auf $n - n_k$ folgenden Abzweigung an steigt der Druck im Verteiler voraussetzungsgemäß nach Bernoulli an, die Trennungsverluste (einschließlich der Reibungsverluste in den Abzweigen) werden allein durch den dynamischen Druck $\frac{\rho}{2} V_1^2$ gedeckt. Ist hingegen bei gleichbleibendem Flächenverhältnis f/F die Zahl der Auslässe kleiner als n_k , dann erfordert der Ausfluß durch die verringerte Zahl von Öffnungen einen Überdruck p_1 gegenüber p_a am Eintritt in den Verteiler.

VI. Vergleich gerechneter und gemessener Verteilerströmungen.

a) Für einen Verteiler gemäß Abb. 1 a wurde die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{v_i}{V_1}$ mit nachstehenden Zahlenwerten berechnet und mit Messungen verglichen (Bezeichnungen s. Abschnitt II, Maße in mm).

$$D = 48; \quad d = 18; \quad \Delta L = 75; \quad l = 85; \quad \lambda_R = 0.0225^6; \quad \lambda_r = 0.021; \\ \lambda_R \frac{\Delta L}{D} = 0.035, \quad \lambda_r \frac{l}{d} = 0.099, \quad \zeta_D = 0.10, \quad f/F = 0.141, \quad \beta^2 = \left(\frac{F}{f}\right)^2 \left(1 + \lambda_r \frac{l}{d}\right) = 55.56.$$

Mit den Beiwerten $a_0 = 20.0$; $a_1 = -38.0$; $a_2 = 19.0$ laut Tabelle 1 für $f/F = 0.141$ lauten die Konstanten der Rekursionsgleichung (4):

$$K_1 = 0.935, \quad K_2 = -149.12, \quad K_3 = 74.56, \quad K_4 = 149.12, \quad K_5 = -75.46.$$

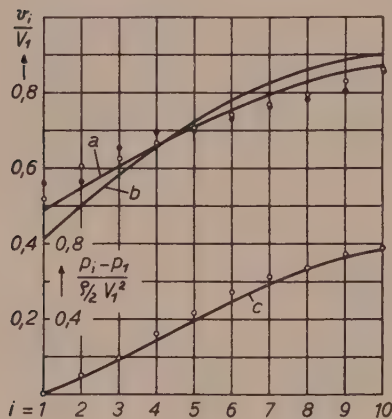


Abb. 4. Verlauf der Austrittsgeschwindigkeit v_i und Druckanstieg längs eines Verteilers mit 10 Abzweigen, $\frac{f}{F} = 0.141$. a) Geschwindigkeitsverlauf $\frac{v_i}{V_1}$ nach Gl. (4) und (5); b) Geschwindigkeitsverlauf nach Gl. (9); c) Druckverlauf nach Gl. (2a). Durch Ringe bzw. Punkte sind die Ergebnisse von zwei Meßreihen dargestellt.

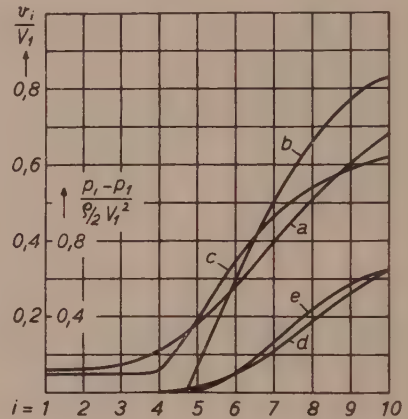


Abb. 5. Verlauf der Austrittsgeschwindigkeit v_i und des Druckanstieges längs eines Verteilers mit 10 Abzweigen, $f/F = 0.338$ ($n > n_k$). a) Geschwindigkeitsverlauf $\frac{v_i}{V_1}$ nach Gl. (4) und (5); b) Geschwindigkeitsverlauf nach Gl. (9); c) gemessener Geschwindigkeitsverlauf; d) berechneter Druckverlauf; e) gemessener Druckverlauf.

Ihre Lösung für $n = 10$ Auslässe ($\frac{n f}{F} = 1.41$), ausgehend von $\frac{V_{10}}{V_0}$ mit $\frac{V_{11}}{V_{10}} = 0$, in Verbindung mit Gl. (5) liefert die in Abb. 4 eingetragene Geschwindigkeitsverteilung v_i/V_1 . Sie zeigt den erwarteten Verlauf, das heißt einen Anstieg in Strömungsrichtung, wobei sich Anfangs- und Endwert wie etwa 1 : 1.8 verhalten.

Vergleichsweise wurde eine Messung der Austrittsgeschwindigkeit an einer Verteileranordnung dieser Art vorgenommen. Da die Zahl der Abzweige am Verteilerrohr größer als 10 war, konnten für $n = 10$ verschiedene Kombinationen gemessen werden (I bis X, II bis XI usw.). Die Meßpunkte von zwei solchen Meßreihen sind in Abb. 4 eingetragen. Sie zeigen, abgesehen von gewissen, zum Teil auch durch Meßungenauigkeiten bedingten Unstetigkeiten, den gleichen Verlauf wie die gerechnete Verteilung. In die gleiche Abbildung ist ferner die cos-Linie eingezeichnet, die sich

⁶ Die Reibungsbeiwerte wurden für mittlere Verhältnisse durch Messung bestimmt, wobei sich für den Verteiler wegen der Störungen durch die Auslässe höhere Werte ergaben als für das glatte Rohr. Der Einfluß von λ_R ist jedoch bei kleineren Abständen ΔL nicht wesentlich.

bei Ersatz der einzelnen Abzweige durch einen Spalt für $k = 1$, $m = 19$, $m_r = \left(\frac{f}{F}\right)^2 m + \lambda_r \frac{l}{d} = 0.475$ aus Gl. (9) ergibt. Ihr Verlauf ist erwartungsgemäß etwas steiler als der für einzelne Abzweige unter Berücksichtigung der Verluste im Verteiler berechnete.

Mit $i = 1$ folgt aus Gl. (2b) der statische Überdruck am Eintritt in den Verteiler $\frac{p_1 - p_a}{\rho/2 V_1^2} = 0.35$, ebenfalls in befriedigender Übereinstimmung mit der Messung, ferner liefert Gl. (2a) den Druckanstieg im Verteiler, der vom gemessenen nicht wesentlich abweicht.

Um die Brauchbarkeit des Verfahrens auch für kleinere Abstände der Abzweige zu prüfen, wurde eine Messung mit einem auf die Hälfte verringerten Abstand ($\frac{4L}{D} = 0.78$) durchgeführt, ohne daß sich eine merkliche Änderung der Verteilung ergab. Bei Verminderung der Zahl der Abzweige, insbesondere für $\frac{n f}{F} \leq 1$, gleicht sich der Abfluß längs des Verteilers weitgehend aus. Für $n = 6$ liefert die Rechnung $\frac{v_6}{v_1} = 1.23$, während die Messung einen noch etwas flacheren Verlauf ergibt.

b) Abb. 5 zeigt die Ergebnisse von Rechnung und Messung für einen Verteiler mit einem größeren Flächenverhältnis, und zwar $f/F = 0.338$ ($d = 27.9$, $l = 150$, die übrigen Abmessungen wie im vorigen Beispiel).

Bei $n = 10$ ist in diesem Fall die durch Gl. (10) ausgedrückte Grenzzahl n_k bereits überschritten. Es ist mit $k = 1$, $m = 3.05$, $\lambda_r = 0.02$, $\lambda_r \frac{l}{d} = 0.1075$ bzw. $m_r = 0.455$:

$$n_k = 5.60.$$

Der nach dem cos-Gesetz (9) berechnete Geschwindigkeitsverlauf beginnt demnach erst zwischen der 4. und 5. Abzweigung, während davor kein Ausströmen erfolgen dürfte. Auch die Rechnung nach Gl. (4) und (5) liefert für die ersten Abzweige sehr geringe Austrittsgeschwindigkeiten. An der 4. Abzweigung setzt dann ein steilerer Anstieg ein⁷. Die gemessene Austrittsverteilung zeigt zumindest einen sehr ähnlichen Verlauf. Rückströmungen konnten auch im vorderen Teil nicht beobachtet werden. Das cos-Gesetz liefert in diesem Fall einen zu steilen Anstieg der Geschwindigkeit v .

Für den Verteilereintritt ergeben Rechnung und Messung nahezu keinen Druckunterschied gegenüber p_a , erst vom 4. Abzweig an steigt der Druck nach dem Verteilerende hin merklich an.

Es sei noch bemerkt, daß das Verfahren prinzipiell auch für anders ausgebildete Abzweige (z. B. einfache Bohrungen) brauchbar ist, sofern der Trennungsverlust ζ_{Ti} für eine einzelne Abzweigung dieser Art in Abhängigkeit vom Mengenverhältnis q/Q durch einen Versuch bestimmt wird. Schließlich sei erwähnt, daß sich das Verfahren auch auf den Fall des Sammlers sowie auf ein vollständiges Verzweigungssystem anwenden läßt, wobei die bei der Vereinigung entstehenden Verluste wenigstens für kleine f/F -Verhältnisse aus dem Impulssatz abgeleitet werden können³. Näheres hierüber folgt in einem II. Teilbericht.

⁷ Für sehr großes n liefert Gl. (4) für die vorderen Abzweige ein konstantes Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{V_{i+1}}{V_i}$, das etwas kleiner als 1 ist, und daher geringe Austrittsgeschwindigkeiten v im vorderen Bereich. Ohne Reibungsverluste im Verteiler ($\lambda_R = 0$) folgt aus der Rekursionsgleichung der Grenzwert $\frac{V_{i+1}}{V_i} = 1$ und daher für die vorderen Abzweige $v = 0$ wie aus der Näherungsrechnung für den Spalt.

(Eingegangen am 10. Mai 1955.)

Zum Problem der großen Spannweiten.

Von Hans Ziegler, Zürich.

Mit 9 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird die durch das Eigengewicht gegebene Begrenzung der Spannweite einer aus schlanken Elementen bestehenden Brücke diskutiert.

Summary. The limitations imposed on the span of a bridge by its proper weight are discussed under the assumption that the bridge is composed of slender elements.

Résumé. Les limitations imposées à la portée d'un pont par son propre poids sont discutées sous l'hypothèse que le pont consiste d'éléments sveltes.

I. Einleitung.

Bei einer Brücke beliebiger Bauart bildet das Eigengewicht mit zunehmender Spannweite einen immer größeren Anteil der Belastung. Jede der heute üblichen Bauarten ist daher nur in einem bestimmten Spannweitenbereich wirtschaftlich und besitzt zudem eine Grenzspannweite, unter der sie eben noch ihr Eigengewicht zu tragen vermag. F. Stüssi¹ hat diese Grenzspannweiten für die wichtigsten Bauformen an Hand von Erfahrungswerten berechnet. Mit ihrer Ermittlung ist das Problem der großen Spannweiten (das mit der geplanten Überbrückung des Oeresund erneut an Aktualität gewonnen hat) vom baustatischen Standpunkte aus unter Berücksichtigung der gegenwärtigen Möglichkeiten weitgehend abgeklärt. Für den Mechaniker bleibt aber eine reizvolle Frage offen: welche Distanzen lassen sich überhaupt, das heißt ohne Rücksicht auf Wirtschaftlichkeit und ohne Beschränkung auf bestimmte Bauprinzipien, frei, das heißt ohne Zwischenträger, überbrücken? Mit anderen Worten: ist es denkbar, daß einer späteren Generation mit größeren wirtschaftlichen Möglichkeiten unter Ausnutzung uns noch unbekannter Bauprinzipien die Überbrückung von Distanzen gelingen kann, welche unsere Höchstspannweiten wesentlich überschreiten?

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich diese Frage grundsätzlich beantworten läßt, wenn man sich auf Brücken beschränkt, die aus lauter schlanken Elementen bestehen, und wenn man den Begriff der Brücke im denkbar weitesten Sinne faßt.

II. Der Coriolis-Bogen.

Unter einem ebenen Bogen kann man einen Körper mit krummer, aber ebener Achse verstehen, welche die Schwerpunkte der zu ihr normalen Schnitte verbindet. Rechtfertigen der Verlauf und die Abmessungen des Querschnittes die Annahmen eines linearen Spannungszustandes in Richtung der Bogenachse und einer linearen Normalspannungsverteilung in den Normalschnitten, dann soll der Bogen schlank heißen.

Abb. 1 zeigt ein durch Vertikalschnitte begrenztes Element eines schlanken Bogens mitsamt den Schnittkräften und ihren Komponenten. Unter der über den Querschnittsverlauf gemachten Voraussetzung fallen die Schwerpunkte S der Normal- und Vertikalschnitte unter sich, aber nicht notwendigerweise mit den Angriffspunkten A der Schnittkräfte zusammen. Die Drucklinie d , welche die Punkte A verbindet, deckt sich also im allgemeinen nicht mit der durch die Punkte S definierten Bogenachse. Bezeichnet γ das (konstante) spezifische Gewicht und F die (langsam veränderliche) Fläche des Normalschnittes, dann ist das Gewicht des Bogenelementes durch

$$dG = \gamma F \cos^{-1} \tau \, dx = \gamma F \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (2.1)$$

¹ F. Stüssi: 3. Kongr. Int. Verein f. Brückenbau u. Hochbau, Schlußbericht, S. 475 (1948).

gegeben. Unter der Annahme, daß die Belastung im Eigengewicht allein bestehe, folgt aus den Komponentenbedingungen für das Element $dX = 0$ und $dY = dG$; es ist also der Horizontaldruck konstant und nach (2. 1)

$$dY = \gamma F \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2. 2)$$

Soll der Bogen auf Druck allein beansprucht sein, dann muß die Drucklinie d mit der Achse a zusammenfallen, mithin an jedem Element $dY/X = dy'$ oder nach (2. 2)

$$y'' = \frac{\gamma F}{X} \sqrt{1 + y'^2} \quad (2. 3)$$

sein. Fordert man weiterhin, daß die Druckspannung P/F in jedem Schnitt die zulässige Grenze σ erreiche, dann muß

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} \cos^{-1} \tau = \frac{X}{\sigma} \sqrt{1 + y'^2} \quad (2. 4)$$

sein, und hieraus folgt im Verein mit (2. 3) die Differentialgleichung

$$y'' = \frac{\gamma}{\sigma} (1 + y'^2) \quad (2. 5)$$

für die Bogenachse.

Das allgemeine Integral von (2. 5) lautet, wenn mit

$$\xi = \frac{\gamma}{\sigma} x, \quad \eta = \frac{\gamma}{\sigma} y \quad (2. 6)$$

dimensionslose Koordinaten eingeführt und die Integrationskonstanten mit a, b bezeichnet werden,

$$\eta + b = \lg \cos^{-1} (\xi + a); \quad (2. 7)$$

ferner ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tg \tau = \tg (\xi + a). \quad (2. 8)$$

Für die in Abb. 1 angedeuteten Randbedingungen (Scheitel im Ursprung) verschwinden beide Integrationskonstanten. Die Lösung nimmt daher die Form

$$\eta = \lg \cos^{-1} \xi, \quad (2. 9)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tg \tau = \tg \xi \quad (2. 10)$$

an, und hieraus folgt, daß die Neigung τ in jedem Schnitt mit der dimensionslosen Abszisse ξ übereinstimmt. Ferner ergibt sich der Verlauf des Normalschnittes, wenn mit

$$F_0 = \frac{X}{\sigma} \quad (2. 11)$$

der Minimalquerschnitt im Scheitel eingeführt wird, nach (2. 4), (2. 6) und (2. 10) zu

$$F = F_0 \cos^{-1} \xi. \quad (2. 12)$$

Abb. 2 zeigt in dimensionsloser Darstellung die Achse (2. 9) und den Querschnittsverlauf (2. 12) dieses Bogens konstanten Druckes, der als Zylinderschale gleichen Widerstandes von K. Federhofer² diskutiert, als Kettenlinie gleichen Widerstandes bereits von G. Coriolis³ gewonnen worden ist und daher im folgenden als Coriolis-

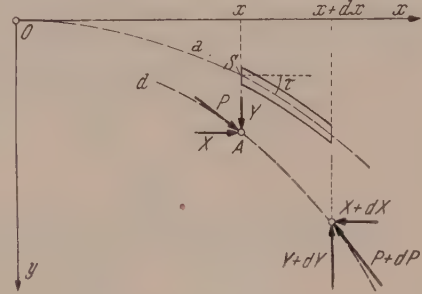


Abb. 1. Kräftespiel am Bogenelement.

² K. Federhofer: Bau-Ing. 20, 366 (1939).

³ G. Coriolis: J. Math. pures appl. 1, 75 (1836).

Bogen bezeichnet werden soll. Die Zahlenwerte können der Tab. 1 entnommen werden, und die Entwicklungen für kleine Werte von ξ lauten

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{12} \xi^4 + \frac{1}{45} \xi^6 + \dots, \\ \frac{F}{F_0} &= 1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{5}{24} \xi^4 + \frac{61}{720} \xi^6 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

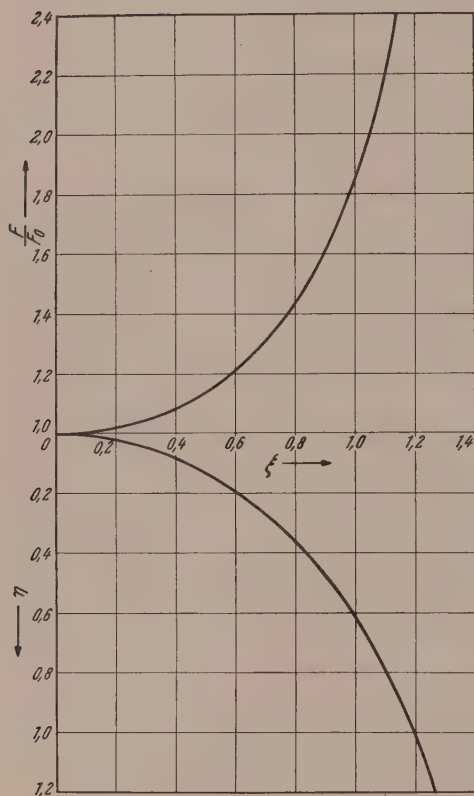


Abb. 2. Achse und Querschnittsverlauf des Coriolis-Bogens.

Tabelle 1.

ξ	η	F/F_0
0	0	1
0.0691	0.0024	1.0024
0.1319	0.0087	1.0088
0.1948	0.0191	1.0193
0.2576	0.0335	1.0341
0.3142	0.0502	1.0515
0.3833	0.0753	1.0782
0.4461	0.1030	1.1085
0.5089	0.1355	1.1451
0.5718	0.1732	1.1892
0.6283	0.2119	1.2361
0.6974	0.2659	1.3047
0.7603	0.3221	1.3800
0.8231	0.3857	1.4707
0.8859	0.4580	1.5809
0.9425	0.5314	1.7013
1.0116	0.6339	1.8850
1.0744	0.7418	2.0998
1.1373	0.8673	2.3804
1.2001	1.0153	2.7603
1.2566	1.1744	3.2361
1.3258	1.4163	4.1220
1.3886	1.7081	5.5185
1.4514	2.1278	8.3964
1.5142	2.8732	17.693
1.5708	∞	∞

wobei sich selbstverständlich alle Ergebnisse auf den durch sein Eigengewicht bereits deformierten Bogen beziehen.

Denkt man sich zwischen zwei gleich hoch liegenden Punkten einen Coriolis-Bogen gespannt, so besteht zwischen seiner Spannweite l und der Pfeilhöhe h ein Zusammenhang, der aus (2.9) abgelesen werden kann und sich in den dimensionslosen Größen

$$\lambda = \frac{\gamma}{\sigma} l, \quad \kappa = \frac{\gamma}{\sigma} h \quad (2.14)$$

in der Form

$$\kappa = \lg \cos^{-1} (\lambda/2) \quad (2.15)$$

schreibt. Ferner ist die größte Neigung α der Achse (an den Enden) nach (2.10) durch

$$\alpha = \frac{\lambda}{2} \quad (2.16)$$

gegeben. Tab. 2 enthält für einige Pfeilhöhenverhältnisse $h/l = \kappa/\lambda$ die zugehörigen Werte von $\lambda/2$, α° und l , wobei der Berechnung von

Tabelle 2.

$\frac{h}{l} = \frac{\kappa}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{2} = \alpha$	α°	l in m	
			Beton	Stahl
0.05	0.1979	11.3	247	756
0.1	0.3896	22.3	487	1489
0.15	0.5666	32.5	708	2165
0.2	0.7256	41.6	907	2773
0.25	0.8644	49.5	1081	3303
0.3	0.9831	56.3	1229	3757
0.35	1.0833	62.1	1354	4140
0.4	1.1676	66.9	1459	4463
0.45	1.2356	70.8	1544	4722
0.5	1.2926	74.1	1616	4940

l ein Beton mit $\gamma = 2.4 \text{ g/cm}^3$ und $\sigma = 150 \text{ kg/cm}^2$ sowie ein Stahl mit $\gamma = 7.85 \text{ g/cm}^3$ und $\sigma = 1500 \text{ kg/cm}^2$ zugrunde gelegt sind.

Wie stets bei Problemen dieser Art bleibt F_0 frei wählbar. Der Bogen kann also theoretisch beliebig dünn gebaut werden, ohne daß indessen eine Verringerung von F_0 auf das bei großen Spannweiten vorhandene starke Anwachsen der Größen F/F_0 , κ und $\text{tg } \alpha$ gegen die Enden hin von Einfluß wäre.

An den Beziehungen (2. 6) bis (2. 16) ändert sich nichts, wenn man die Vorzeichen von X , γ und σ umkehrt; man erhält auf diese Weise den Bogen konstanten Zuges, der als Kabel für Hängebrücken von Interesse ist.

In unserem Zusammenhang interessiert vor allem die Tatsache, daß die Bogenachse (2. 9) für $\xi = \pm \pi/2$ vertikale Asymptoten besitzt, so daß κ und $\text{tg } \alpha$ für $\lambda \rightarrow \pi$ unbegrenzt anwachsen. Es folgt hieraus, daß die Horizontalabstände, die sich mit dem Coriolis-Bogen überbrücken lassen, nach oben durch die Grenzspannweite

$$L = \pi \frac{\sigma}{\gamma} \quad (2. 17)$$

beschränkt sind, die nur vom Material abhängt und für die als Beispiele angeführten Baustoffe 1.963 km (Beton) bzw. 6.003 km (Stahl) beträgt.

III. Graphische Konstruktion.

Bezeichnet r den Krümmungsradius der Bogenachse, so folgt aus (2. 5) und (2. 12) unter Berücksichtigung von (2. 10)

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma}{\sigma} \cos \tau, \quad (3. 1)$$

$$F = F_0 \cos^{-1} \tau. \quad (3. 2)$$

Führt man mit

$$\varrho = \frac{\gamma}{\sigma} r \quad (3. 3)$$

den dimensionslosen Krümmungsradius ein, so kann man statt (3. 1) und (3. 2) auch

$$\varrho \cos \tau = 1, \quad (3. 4)$$

$$F = F_0 \varrho \quad (3. 5)$$

schreiben.

Aus den beiden letzten Beziehungen ergibt sich für den Coriolis-Bogen eine einfache Näherungskonstruktion: Die Achse wird (Abb. 3) aus Kreisbögen geeignet gewählter Länge zusammengesetzt, wobei der Krümmungsmittelpunkt stets so gewählt wird, daß die Vertikalprojektion des Radius im Anfangspunkt des Bogens 1 ist. Die Querschnittsfläche wird im Anfangspunkt jedes Teilbogens durch Multiplikation von F_0 mit dem Radius erhalten. Die Annäherung der Achse durch Kreisbögen gibt dabei der Konstruktion eine relativ hohe Genauigkeit.

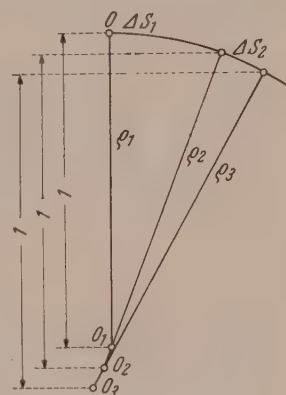


Abb. 3. Zeichnerische Konstruktion des Coriolis-Bogens.

IV. Der diskret belastete Bogen konstanter Beanspruchung.

Bei Brücken mit bogenförmigem Hauptträger (Bogen- und Hängebrücken) wird das Fahrbahn- und Nutzgewicht meist abschnittsweise (nämlich in den Knoten 0, 1, 2, ... der Abb. 4) auf diesen übertragen. Der Hauptträger kann dann in jedem der Zwischenfelder (01, 12, ...) als Coriolis-Bogen ausgebildet werden, und zwar bei einheitlichem Baustoff und vertikalen sowie biegungsfreien Übertragungselementen mit Hilfe von Abschnitten eines und desselben Bogens. Man trennt zu diesem Zweck,

große Zahl von zentrisch beanspruchten Druck- oder Zugfasern aufgelöst und Vertikalstäbe unter Berufung darauf, daß sie praktisch stets eine geringe Neigung aufweisen, ausgeschlossen werden, so daß die Scheibe schließlich als Verteilung A von n Fasern i (Abb. 5) mit den spezifischen Gewichten γ_i und den Vertikalschnitten f_i aufgefaßt werden kann, die sich von Schnitt zu Schnitt erstrecken und das Gesamtgewicht

$$\delta Y_A = \sum_1^n \gamma_i f_i \delta x \quad (6.1)$$

aufweisen. Ist $\vec{P}_i(X_i, Y_i, Z_i)$ die von der i -ten Faser übertragene Kraft und σ_i ihre (für Druckfasern positiv und für Zugfasern negativ gerechnete) zulässige Spannung, dann gilt bei richtiger Dimensionierung

$$P_i \leq \sigma_i f_i \frac{X_i}{P_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.2)$$

also nach (6.1)

$$\delta Y_A \geq \sum_1^n \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \frac{P_i^2}{X_i} \delta x = \sum_1^n \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \left(X_i + \frac{Y_i^2 + Z_i^2}{X_i} \right) \delta x, \quad (6.3)$$

wobei dank der Konvention für das Vorzeichen von σ_i alle Summanden positiv sind und über allfällige spannungslose Fasern nicht summiert werden soll. Bei knappster Dimensionierung (und nur in diesem Falle) gilt in (6.3) das Gleichheitszeichen.

Jeder der Baustoffe, die in der Brücke vorkommen, besitzt eine zulässige Druckspannung $\sigma_d > 0$ und eine zulässige Zugspannung $\sigma_z < 0$. Bezeichnet man denjenigen mit dem größten Quotienten σ_d/γ als den bezüglich Druck und denjenigen mit dem kleinsten Quotienten σ_z/γ als den bezüglich Zug günstigsten Baustoff, so gilt

$$a_I = \left(\frac{\sigma_d}{\gamma} \right)_{\max} \geq \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \geq \left(\frac{\sigma_z}{\gamma} \right)_{\min} = a_{II}. \quad (6.4)$$

Ersetzt man jetzt die Fasern der Scheibe A durch solche aus dem für ihre Beanspruchung günstigsten Baustoff, so erhält man eine neue Scheibe B , die nach (6.3) und (6.4) bei knappster Dimensionierung das Gewicht

$$\delta Y_B = \sum_1^n \frac{1}{a_i} \left(X_i + \frac{Y_i^2 + Z_i^2}{X_i} \right) \delta x \quad (6.5)$$

ausweist, wenn zur Abkürzung

$$a_i = \begin{cases} a_I > 0, & (X_i > 0) \\ a_{II} < 0 & (X_i < 0) \end{cases} \quad (6.6)$$

gesetzt wird. Mit (6.4) und (6.6) folgt aus dem Vergleich von (6.3) und (6.5)

$$\delta Y_B \leq \delta Y_A. \quad (6.7)$$

Die Scheibe B ist mithin nicht schwerer als A ; sie stellt die leichteste Scheibe dar, welche die gegebenen Schnittkräfte \vec{P}_i einzeln zu übertragen vermag.

Durch Reduktion der \vec{P}_i im Schnitt x erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrie eine resultierende Schnittkraft $\vec{P}(X, Y, 0)$ in der Mittelebene, und zwar ist

$$\sum_1^n X_i = X, \quad \sum_1^n Y_i = Y. \quad (6.8)$$

Zerlegt man sie in n neue Kräfte $\vec{P}'_i(X'_i, Y'_i, Z'_i)$ mit den Komponenten

$$X'_1 = X_i, \quad Y'_i = \left(\sum_1^n a_k X_k \right)^{-1} a_i X_i Y, \quad Z'_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.9)$$

so stellen diese eine neue Faserverteilung C dar. Dabei entspricht jeder Druck- bzw. Zugfaser von A bzw. B eine solche von C , und wenn man sich die Faserverteilung C aus den günstigsten Baustoffen hergestellt denkt, dann hat sie gemäß (6. 5) und (6. 9) bei knappster Dimensionierung das Gewicht

$$\delta Y_c = \left[\sum_1^n \frac{Y_i}{a_i} + \left(\sum_1^n a_k X_k \right)^{-1} Y^2 \right] \delta x. \quad (6. 10)$$

Da nach der Schwartzschen Ungleichung⁴

$$\sum_1^n a_k X_k \sum_1^n \frac{Y_i^2}{a_i X_i} \geq \left(\sum_1^n Y_i \right)^2, \quad (6. 11)$$

also

$$\sum_1^n \frac{X_i^2 + Z_i^2}{a_i X_i} \geq \sum_1^n \frac{Y_i^2}{a_i X_i} \geq \left(\sum_1^n a_k X_k \right)^{-1} Y^2 \quad (6. 12)$$

ist, ergibt der Vergleich von (6. 5) mit (6. 10)

$$\delta Y_c \leq \delta Y_B. \quad (6. 13)$$

Abb. 6. Ersatz der Elementarscheibe durch zwei Fasern.

Die Scheibe C ist mithin nicht schwerer als B , und δY_c ist das Minimalgewicht aller Scheiben, welche die Schnittkraft \vec{P} in Form von n Einzelkräften \vec{P}_i mit vorgeschriebenen Komponenten X_i zu übertragen vermögen.

Nach (6. 6) hat a_i für alle Druck- bzw. Zugfasern je denselben Wert. Die Scheibe C besteht daher nach (6. 9) aus unter sich parallelen Druck- bzw. Zugfasern und kann (Abb. 6) durch eine neue Scheibe D ersetzt werden, die aus einer einzigen Druckfaser I und höchstens einer Zugfaser II je aus dem günstigsten Baustoff besteht. Deutet man mit einem Strich die Beschränkung der Summe auf Druckfasern an, so erhält man die Komponenten der neuen Schnittkräfte $\vec{P}_I(X_I, Y_I, 0)$, $\vec{P}_{II}(X_{II}, Y_{II}, 0)$ durch Summation von (6. 9) mit

$$\left. \begin{aligned} X_I &= \sum' X_i, & Y_I &= a_I (a_I X_I + a_{II} X_{II})^{-1} X_I Y, \\ X_{II} &= X - X_I, & Y_{II} &= a_{II} (a_I X_I + a_{II} X_{II})^{-1} X_{II} Y. \end{aligned} \right\} \quad (6. 14)$$

Das Gewicht von D ist nach (6. 5) und (6. 10) bei knappster Dimensionierung

$$\delta Y_D = \left[\frac{X_I}{a_I} + \frac{X_{II}}{a_{II}} + (a_I X_I + a_{II} X_{II})^{-1} Y^2 \right] \delta x = \delta Y_c; \quad (6. 15)$$

es stellt das Minimalgewicht aller Scheiben dar, welche die Schnittkraft \vec{P} zu übertragen vermögen und der weiteren Bedingung genügen, daß der totale Horizontaldruck ihrer Druckfasern den Wert X_I hat.

Enthält die Scheibe A keine Zugfasern, dann ist nach (6. 14) $\vec{P}_{II} = 0$. Die Scheibe D besteht dann aus einer einzigen Faser mit der Schnittkraft \vec{P} und dem Gewicht

$$\delta Y_D = \frac{1}{a_I} \left(X + \frac{Y^2}{X} \right) \delta x. \quad (6. 16)$$

Ferner lassen sich für eine Brücke mit Horizontalzug $X < 0$ analoge Überlegungen durchführen. Demnach kann jede Scheibe A mit der Schnittkraft \vec{P} durch höchstens zwei Fasern (nämlich eine Druck- und eine Zugfaser) aus den günstigsten Baustoffen ersetzt werden, die zusammen bei knappster Dimensionierung nicht schwerer als A

⁴ Vgl. z. B. L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 13. Leipzig und Berlin. 1930.

sind. Umgekehrt folgt hieraus, daß die gegebene Scheibe unter Erhaltung ihres Gewichtes durch höchstens zwei Fasern ersetzt werden kann, die, aus den günstigsten Baustoffen hergestellt, nicht überbeansprucht sind.

Setzt man jetzt wieder $X > 0$ voraus, so folgt aus der Äquivalenz von \vec{P}_I und \vec{P}_{II} mit \vec{P}

$$X_I + X_{II} = X, \quad X_I \geq X, \quad X_{II} \leq 0, \quad (6.17)$$

und damit hat man nach (6.14)

$$\left. \begin{aligned} Y_I &= a_I [(a_I - a_{II}) X_I + a_{II} X]^{-1} X_I Y, \\ Y_{II} &= a_{II} [(a_I - a_{II}) X_I + a_{II} X]^{-1} X_{II} Y \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

und statt (6.15)

$$\delta Y_D = \left\{ \left(\frac{1}{a_I} - \frac{1}{a_{II}} \right) X_I + \frac{X}{a_{II}} + [(a_I - a_{II}) X_I + a_{II} X]^{-1} Y^2 \right\} \delta x. \quad (6.19)$$

Wie bereits bemerkt wurde, ist das Minimum δY_D noch an eine Nebenbedingung gebunden, indem nämlich zur Konkurrenz nur Scheiben zugelassen wurden, für welche der totale Horizontaldruck der Druckfasern den durch (6.14) vorgeschriebenen festen Wert X_I hat. Läßt man nun auch diese Forderung fallen, dann gibt es auch bei knappster Dimensionierung unendlich viele Scheiben D , welche die Schnittkraft \vec{P} zu übertragen vermögen. Um ihre Gewichte (6.19) zu vergleichen, bilden wir, indem wir jetzt δY_D als Funktion von X_I auffassen und die übrigen in (6.19) auftretenden Größen festhalten,

$$\frac{d}{dX_I} (\delta Y_D) = \left\{ \frac{1}{a_I} - \frac{1}{a_{II}} - [(a_I - a_{II}) X_I + a_{II} X]^{-2} (a_I - a_{II}) Y^2 \right\} \delta x. \quad (6.20)$$

Die rechte Seite von (6.20) nimmt zufolge (6.6) mit X_I zu und verschwindet für

$$(a_I - a_{II}) X_I + a_{II} X = (-a_I a_{II})^{1/2} Y. \quad (6.21)$$

Hieraus folgt, daß δY_D für den durch (6.21) gegebenen Wert X_I minimal wird. Das Minimum berechnet sich aus (6.19) und (6.21) zu

$$\delta Y_E = \left[\left(\frac{1}{a_I} + \frac{1}{a_{II}} \right) X + 2 (-a_I a_{II})^{-1/2} Y \right] \delta x \quad (6.22)$$

und wird nach (6.17), (6.18) und (6.21) von einer Scheibe E angenommen, die sich aus zwei Fasern aus den günstigsten Materialien mit den Schnittkräften

$$\left. \begin{aligned} X_I &= \frac{-a_{II} X + (-a_I a_{II})^{1/2} Y}{a_I - a_{II}}, & Y_I &= \left(-\frac{a_I}{a_{II}} \right)^{1/2} X_I, \\ X_{II} &= \frac{a_I X - (-a_I a_{II})^{1/2} Y}{a_I - a_{II}}, & Y_{II} &= -\left(-\frac{a_{II}}{a_I} \right)^{1/2} X_{II} \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

zusammensetzt. Dabei ist zu beachten, daß für

$$\frac{Y}{X} < \left(-\frac{a_I}{a_{II}} \right)^{1/2} \quad (6.24)$$

nach (6.23) im Widerspruch zu (6.17) $X_I < X$ wird. In diesem Falle wird das Minimum von δY_D im Bereich $X_I \geq X$ für $X_I = X$, das heißt von einer Scheibe E angenommen, die aus einer einzigen Faser aus dem günstigsten Material mit der Schnittkraft \vec{P} besteht, und statt (6.22) gilt nach (6.19)

$$\delta Y_E = \frac{1}{a_I} \left(X + \frac{Y^2}{X} \right) \delta x. \quad (6.25)$$

Diesen Überlegungen zufolge, die sich sinngemäß auf den Fall $X < 0$ übertragen lassen, ist für Schnittkräfte \vec{P} , die so schwach geneigt sind, daß (6. 24) gilt, das Gewicht der leichtesten Scheibe, die \vec{P} zu übertragen vermag, durch (6. 25) gegeben, und die Scheibe kann als Einzelfaser aus dem hinsichtlich Druck günstigsten Baustoff mit der Schnittkraft \vec{P} ausgebildet werden. Ist dagegen \vec{P} so steil, daß (6. 24) nicht mehr gilt, dann folgt das Gewicht von E aus (6. 22), und E kann aus zwei Fasern I und II aus den günstigsten Baustoffen mit den Schnittkräften (6. 23) aufgebaut werden.

Bei einheitlichem Baustoff mit absolut gleicher Druck- und Zugfestigkeit σ werden die Resultate besonders einfach. Da dann nach (6. 4)

$$a_I = -a_{II} = \frac{\sigma}{\gamma} \quad (6. 26)$$

ist, geht die Forderung (6. 24) in

$$Y < X \quad (6. 27)$$

über und ist erfüllt, solange die Neigung von \vec{P} kleiner als $\pi/4$ ist. In diesem Falle wird das kleinste Scheibengewicht bei knappster Dimensionierung von einer Einzelfaser aus dem günstigsten Baustoff in der Wirkungslinie von \vec{P} angenommen, die auch in mehrere parallele Teilfasern aufgelöst werden könnte und nach (6. 25) sowie (6. 26) das Gewicht

$$\delta Y_E = \frac{\gamma}{\sigma} \left(X + \frac{Y^2}{X} \right) \delta x \quad (6. 28)$$

hat. Ist dagegen (6. 27) nicht erfüllt, dann ist das kleinste Scheibengewicht nach (6. 22) und (6. 26)

$$\delta Y_E = 2 \frac{\gamma}{\sigma} Y \delta x. \quad (6. 29)$$

Es wird bei knappster Dimensionierung von zwei Fasern I und II aus den günstigsten Baustoffen angenommen, die nach (6. 23) und (6. 26) die Schnittkräfte

$$\left. \begin{aligned} X_I &= \frac{1}{2} (X + Y), & Y_I &= X_I, \\ X_{II} &= \frac{1}{2} (X - Y), & Y_{II} &= -X_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (6. 30)$$

also die Neigungen $\pi/4$ bzw. $-\pi/4$ aufweisen und einzeln auch wieder in parallele Teilfasern aufgelöst werden könnten.

VII. Brücken aus Zug- oder Druckfasern.

Um zum Problem der Grenzspannweite überzugehen, denken wir uns eine Brücke gegeben, die den in Abschnitt I und VI formulierten Voraussetzungen genügt, also aus schlanken Elementen besteht, einen Horizontaldruck $X > 0$ aufweist und bezüglich der (x, y) -Ebene (Abb. 7) symmetrisch ist. Darüber hinaus setzen wir Symmetrie bezüglich der y -Achse voraus.

Eine solche Brücke kann nach Abschnitt VI in vertikale Scheiben A (Abb. 7) zerlegt werden, die unter ihren Gewichten δY_A und den Schnittkräften $\vec{P}(x)$, $-\vec{P}(x + \delta x)$ im Gleichgewicht sind. Verbindet man die Angriffspunkte aller Schnittkräfte, so erhält man die zu dieser Schnitteinteilung gehörende Drucklinie d , die als Seilkurve für die spezifische Belastung $\delta Y_A/\delta x$ gedeutet werden kann und eine Tangente besitzt, welche in jedem Schnitt x die Schnittkraft $\vec{P}(x)$ enthält.

Weist die Brücke keine Zugfasern auf, dann können nach Abschnitt VI ihre Scheiben A durch Einzelfasern D in der Drucklinie d ersetzt werden, die aus dem hinsichtlich Druck günstigsten Baustoff bestehen, die Gewichte δY_A haben und nicht überbeansprucht sind. Dadurch entsteht ein einziger, zentrisch und nicht zu stark beanspruchter Druckbogen mit der Achse d . Enthält er Querschnitte, die nicht voll beansprucht sind, dann kann er leichter ausgeführt werden. Durch Entfernen des überflüssigen Materials geht er aber in einen Coriolis-Bogen über, dessen Achse a in keinem Schnitt steiler ist als d (so daß d im nach oben durch a begrenzten Bereich liegen muß).

Für eine Brücke, die keine Druckfasern und damit einen Horizontalzug $X < 0$ aufweist, gelten analoge Überlegungen, und daraus folgt, daß (2. 17) die Grenzspannweite jeder aus schlanken Elementen bestehenden, nur Druck- oder Zugfasern enthaltenden Brücke ist, wenn γ das spezifische Gewicht und σ den Betrag der zulässigen Druck- bzw. Zugspannung des günstigsten Materials bezeichnet.

Dieser Satz, der zunächst noch an die zu Beginn dieses Abschnittes formulierten Symmetrieanahmen gebunden ist, läßt sich ohne weiteres davon befreien. Wäre er nämlich für eine asymmetrische Brücke F falsch, dann müßte er auch für die symmetrische Brücke ungültig sein, die aus F durch Hinzufügen der Spiegelbilder erhalten wird. Ferner darf bei Brücken, die nur aus Druck- bzw. Zugfasern bestehen, der Fall $X = 0$ ausgeschlossen werden, auch wenn man davon absieht, daß er sich praktisch nie exakt realisieren läßt.

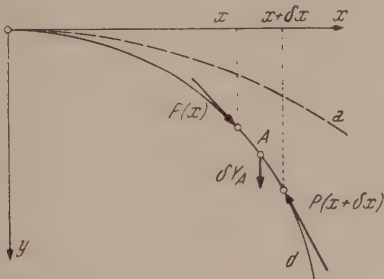


Abb. 7.
Drucklinie d und obere Grenze a .

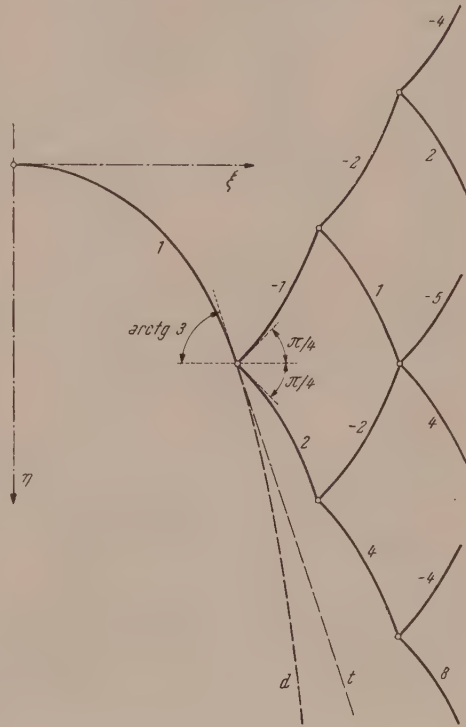


Abb. 8.
Netzwerk mit unbeschränkter Spannweite.

VIII. Brücken mit Zug- und Druckfasern.

Für Brücken, die Druck- und Zugfasern enthalten, läßt sich ein ähnlicher Satz nicht formulieren. Diejenigen Scheiben A einer Brücke mit Horizontaldruck $X > 0$, die in der Nähe des Scheitels liegen und daher noch der Bedingung (6. 24) genügen, lassen sich nach Abschnitt VI zwar noch durch leichtere Einzelfasern E aus dem günstigsten Material und damit insgesamt durch einen Coriolis-Bogen ersetzen. In größerer Entfernung vom Scheitel, nämlich vom Schnitt an, in dem (6. 24) erstmals nicht mehr erfüllt ist, muß aber beim Ersatz von A durch eine Einzelfaser E nach Abschnitt VI damit gerechnet werden, daß E schwerer ist als A .

Tatsächlich gibt es für die Spannweite einer aus Druck- und Zugfasern bestehenden Brücke keine obere Schranke. So kann man beispielsweise mit dem in Abb. 8 dargestellten Netz von auf Druck und Zug beanspruchten, aus einem Material mit gleicher Druck- und Zugfestigkeit bestehenden Coriolis-Bögen beliebige Distanzen überbrücken. Dieses Netz wird dadurch aus einem Coriolis-Bogen mit dem Horizontaldruck X erhalten, daß an der Stelle, wo seine Achse die Neigung $\alpha = \arctg 3$ erreicht, unter den Winkeln $\pi/4$ und $-\pi/4$ je ein Coriolis-Bogen mit dem Horizontaldruck $2X$ bzw. $-X$ angeschlossen und mit jedem neuen Bogen analog verfahren wird. Die in Abb. 8 eingetragenen Zahlen ergeben, mit X multipliziert, die Horizontaldrücke der Einzelbögen; mit ihrer Hilfe überzeugt man sich leicht davon, daß die Schnittkräfte in jedem Knoten im Gleichgewicht sind und das Netz nach rechts beliebig weit fortgesetzt werden kann. In der Tat ist der Horizontaldruck des ganzen Netzes überall X , und da die vertikale Komponente von \vec{P} monoton anwächst und unter den Knoten die Werte $3X, 9X, 27X, \dots$ annimmt, hat die Drucklinie d , obschon sie konvex ist und damit insbesondere die im ersten Knoten an die erste Bogenachse gelegte Tangente t nicht überschreitet, keine vertikale Asymptote.

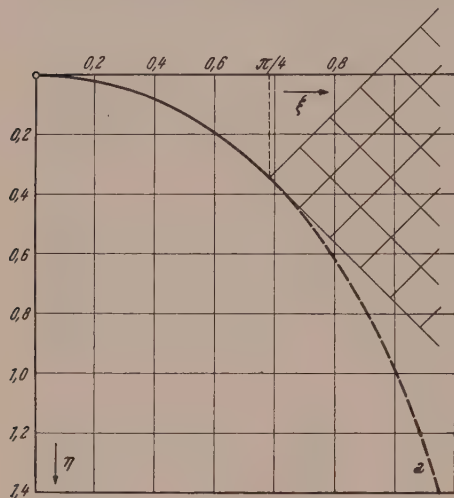


Abb. 9. Leichtestes Netzwerk mit oberer Grenze α für die Drucklinie.

Abschnitt VI mit $\alpha = \pi/4$ gewonnen und ist (Abb. 9) dadurch gekennzeichnet, daß der Coriolis-Bogen in eine unendlich feine Verteilung von Druck- und Zugfasern unter $\pi/4$ bzw. $-\pi/4$ übergeführt wird. Die Überlegenheit des Netzes über den Einzelbögen rührt nach Abschnitt VI allgemein davon her, daß das Scheibengewicht im Netz für Neigungen von \vec{P} , die (6. 24) nicht genügen, kleiner gehalten werden kann als das Gewicht des Einzelbogens.

IX. Bemerkungen.

Die in den beiden letzten Abschnitten gewonnenen Ergebnisse sind (von den besonderen Beispielen in Abschnitt VIII abgesehen) nur an die Voraussetzung gebunden, daß die Brücke aus schlanken Elementen bestehe. Ihre Gültigkeit beschränkt sich insbesondere nicht auf elastische Baustoffe, sondern erstreckt sich, wenn σ_d und σ_z als Druck- bzw. Zugfließgrenze interpretiert werden, nach dem Prinzip von S. M. Feinberg⁵ auch auf ideal plastische Stoffe.

Die Aussage von Abschnitt VII, daß (2. 17) die Grenzspannweite jeder nur Druck- oder Zugfasern enthaltenden Brücke sei, dürfte im Hinblick auf Hänge- und Bogenbrücken ein gewisses Interesse aufweisen. Dagegen erscheint die nach Abschnitt VIII bei Brücken mit Druck- und Zugfasern gegebene Möglichkeit, die Schranke (2. 17) zu überschreiten, vom praktischen Standpunkte aus problematisch, da sie sich offenbar nur um den Preis von Bauhöhen verwirklichen läßt, die von der Größenordnung

⁵ S. M. Feinberg: Prikladnaia Matematika i Mekhanika 12, 63 (1948).

der Spannweite sind. Man kann sich tatsächlich fragen, ob die Netzwerke von Abb. 8 und 9 praktisch noch unter den Begriff der Brücke fallen.

Es besteht Grund zur Vermutung, daß (2. 17) auch Grenzspannweite für aus Druck- und Zugfasern bestehende Brücken sei, wenn man die Divergenz der Fasern, wie sie im Netzwerk gegen die Enden hin auftritt, ausschließt. Man müßte, um sie zu beweisen, die Existenz von Scheiben mit geringerem Gewicht zulassen, als es das entsprechende Stück des Coriolis-Bogens besitzt, und dann nachweisen, daß in diesem Falle an anderen Stellen Scheiben auftreten müssen, welche dieses Untergewicht wieder kompensieren.

Auf Grund von Abschnitt VIII läßt sich aber auch ohne diese zusätzliche Voraussetzung eine Grenzkurve a (Abb. 9) für die Drucklinie d einer beliebigen Brücke mit Horizontaldruck $X > 0$ angeben. Diese besteht, wenn man jetzt wieder die dimensionslosen Koordinaten (2. 6) verwendet und dabei für γ und σ die Werte des hinsichtlich Druck günstigsten Materials einsetzt, bis zur Abszisse $\xi = \pi/4$ aus der Achse (2. 9) des Coriolis-Bogens. Für $\xi \geq \pi/4$ hat sie nach der Beziehung (6. 29), die sich auch in der Form

$$dy' = d\left(\frac{Y_E}{X}\right) = 2 \frac{\gamma}{\sigma} \frac{Y}{X} dx \quad (9. 1)$$

anschreiben läßt, und nach (2. 6) die Differentialgleichung

$$\eta'' = 2 \eta', \quad (9. 2)$$

ist also mit Rücksicht auf die aus (2. 9) und (2. 10) folgenden Anschlußbedingungen $\eta(\pi/4) = \lg \sqrt{2}$ und $\eta'(\pi/4) = 1$ durch

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\exp\left(2\xi - \frac{\pi}{2}\right) + \lg 2 - 1 \right] \quad (9. 3)$$

gegeben. Der Bereich, in dem die Drucklinie d in jedem Falle liegen muß, ist nach oben durch die Kurve a begrenzt, die in Abb. 9 eingetragen und in Tab. 3 im Anschluß an die bis $\xi = \pi/4$ gültigen Werte von Tab. 1 zahlenmäßig dargestellt ist.

Bezeichnet ferner f den Vertikalschnitt durch die Brücke, dann gilt im günstigsten Fall der Abb. 9

$$\gamma f dx = dY_E = X dy', \quad (9. 4)$$

mithin nach (2. 6) und (2. 11)

$$f = \frac{X}{\gamma} \frac{dy'}{dx} = \frac{X}{\sigma} \eta'' = f_0 \eta'', \quad (9. 5)$$

wenn $f_0 = F_0$ die Fläche des Scheitelschnittes bezeichnet. Somit erhält man nach (9. 3) für das Verhältnis f/f_0 die Funktion

$$\frac{f}{f_0} = 2 \exp\left(2\xi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (9. 6)$$

die in Tab. 3 miteingetragen ist.

Analoge Resultate gelten im Falle einer Brücke mit Horizontalzug $X < 0$, wobei hier die Kurve a nach oben gekrümmt ist und den Bereich für d nach unten begrenzt.

Tabelle 3.

ξ	η	f/f_0
0.7854	0.3466	2.0000
0.8639	0.4316	2.3402
0.9425	0.5311	2.7382
1.0210	0.6476	3.2040
1.0996	0.7838	3.7490
1.1781	0.9432	4.3866
1.2566	1.1298	5.1326
1.3352	1.3480	6.0056
1.4137	1.6034	7.0272
1.4923	1.9022	8.2224
1.5708	2.2518	9.6210
1.7279	3.1396	13.1722
1.8850	4.3551	18.0340
2.0420	6.019	24.690
2.1991	8.297	33.804
2.3562	11.417	46.282
2.7489	25.223	101.508
3.1416	55.50	222.64
3.5343	121.92	488.30
3.9270	267.59	1070.98
4.3197	587.1	2349.0
4.7124	1287.8	5152.0
5.4978	6196	24784
6.2832	29805	119220
7.0686	143375	573500
7.8540	689700	2758800

Ja selbst für Brücken ohne Horizontalkraft behalten die Ergebnisse ihre Gültigkeit, da praktisch immer mit dem Vorhandensein einer, wenn auch noch so geringen Horizontalkraft gerechnet werden muß.

Nun bestätigt (9. 3) zwar die Aussage von Abschnitt VIII, daß bei Brücken mit Druck- und Zugfasern die Spannweite theoretisch unbeschränkt sei; andererseits zeigt aber der exponentielle Charakter von (9. 3), der sich in (9. 6) wiederholt und in Tab. 3 besonders augenfällig in Erscheinung tritt, daß ihr praktisch doch Grenzen gesetzt sind, und daß ein wesentliches Überschreiten des Wertes (2. 17) (der im Falle $X = 0$ mit den Daten des absolut günstigsten Materials zu bilden ist) auf jeden Fall nur um den Preis eines ungeheuren Materialaufwandes möglich ist. So haben η und f/f_0 für $\xi = \pi$ bereits die Minimalwerte 55.5 bzw. 223 und für $\xi = 2\pi$ gar die Werte 29805 bzw. 119220. Man wird daher zur Feststellung berechtigt sein, daß (2. 17) eine Spannweite darstellt, die aus praktischen Gründen in keinem Falle erheblich überschritten werden kann.

(Eingegangen am 15. März 1955.)

Buchbesprechungen.

Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern. Von J. Ackeret. — **Über thermische Effekte in Resonanzrohren.** Von H. Sprenger. — **Schubvermehrung durch Strahlmischung.** Von Z. Plaskowski. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik der ETH Zürich. Herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 21.) Mit Textabb., 55 S. Zürich: Verlag Leemann. 1954.

In der neuesten Nummer der bekannten Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik der ETH Zürich finden wir diesmal drei interessante Abhandlungen.

In der ersten gibt J. Ackeret eine theoretische Entwicklung über eine Erscheinung, die man „aerodynamische Abkühlung“ bezeichnen kann und die darin besteht, daß hinter angeströmten Körpern besonders tiefe Temperaturen auftreten können. Da man Strömungsablösung hat, so kann man, wie der Verfasser annimmt, das Abgehen von Wirbeln für die Abkühlung verantwortlich machen. Die Berechnung auf Grund einer Potentialströmung und die Meßergebnisse zeigen sehr gute Übereinstimmung.

In der zweiten Abhandlung befaßt sich H. Sprenger mit der schon bekannten Tatsache der Teilung eines in einem Wirbelrohr strömenden Gases in einen erwärmten und einen abgekühlten Teilstrom. Des Verfassers Untersuchungen und Messungen gelten einer Anordnung, die ebenfalls solche Erscheinungen zeigt, nämlich dem „Resonanzrohr“. Es werden interessante Meßergebnisse und Vorführungsexperimente gebracht. Wirbelrohr und Resonanzrohr werden in ihren Effekten miteinander verglichen.

Die dritte Abhandlung beinhaltet theoretische und praktische Untersuchungen über die Schubvermehrung, die durch Strahlmischung erreicht wird. Die Resultate konnten durch geschickte Anordnung der Düse günstig beeinflusst werden.

Wie jede Nummer enthält auch diese wieder sehr interessante Berechnungen und Messungen auf aerodynamischem Gebiet.

R. Bruniak, Wien.

Atomphysik. Von K. Bechert und Chr. Gerthsen. Band III: Theorie des Atombaues, 1. Teil. Dritte, umgearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen: Band 1123/1123a.) Mit 16 Textabb., 148 S. — Band IV: Theorie des Atombaues, 2. Teil. Dritte, umgearbeitete Auflage. (Sammlung Götschen: Band 1165/1165a.) Mit 14 Textabb., 170 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1954. Jeder Band DM 4.80.

Mit der Fortsetzung der ersten zwei Bände Atomphysik durch K. Bechert liegt nun auch eine Darstellung der Theorie der Atomhülle in der handlichen Götschen-Sammlung vor. Der dritte Band bringt eine ausführliche Einführung in die elementare Quantentheorie, Quantenmechanik und Wellenmechanik; Band IV erweitert die Anwendungen auf Mehrelektronensysteme und Moleküle und bringt den Formalismus der Störungsrechnung. Schließlich wird noch die Dirac-Gleichung eingeführt und ihre Konsequenzen werden kurz diskutiert. Beide Bände bilden eine sorgfältige Zusammenstellung der Theorie der Atomhülle in konventioneller Form. Ohne die Verständlichkeit zu beeinträchtigen, wird durch knappe Darstellungsweise ein großer Stoff behandelt, so daß hinsichtlich Quantität des dargebotenen Wissensstoffes je Pfennig Buchpreis gerechnet, diese beiden Bändchen an der Spitze der physikalischen Nachkriegsbücher stehen dürften.

W. Thirring, Wien.

Spannbeton für die Praxis. Von *F. Leonhardt*. Mit 658 Textabb. und 21 Tafeln, XX, 472 S. Berlin: W. Ernst & Sohn. 1955. DM 55.—, geb. DM 59.—.

Mit dem vorliegenden Werk wird im deutschsprachigen Fachschrifttum eine Lücke geschlossen, die sich empfindlich bemerkbar machte. Der Verfasser, bekannt als Vorkämpfer und Praktiker der neuen Bauweise im Stahlbeton, versucht nach seinen Worten, gestützt auf seine jahrelangen Erfahrungen an zahlreichen Spannbetonbauten, eine zusammenfassende Darstellung der Grundlagen des Spannbetons zu geben und vor allem für die Praxis im Büro und an der Baustelle die nötigen Erkenntnisse zu vermitteln. Der Versuch ist, das sei vorweg festgestellt, voll gelungen.

Der Stoff ist übersichtlich in 20 Kapitel gegliedert, welche je für sich ein abgeschlossenes Gebiet behandeln. Konstruktive und praktische Fragen werden dem Titel des Buches entsprechend ausführlicher behandelt als die theoretischen Probleme, die so einfach wie nur möglich dargestellt sind. Hiezu bemerkt der Verfasser im Vorwort sehr richtig, daß das Kapitel über die Berechnung keine neue Lehre der Statik des Spannbetons enthalte, weil es eine solche nicht gebe. Beispiele ausgeführter Bauten werden nur soweit gebracht, als dies zur erläuternden Darstellung der im Text behandelten Prinzipien nötig erscheint. Im übrigen ist auf das sehr reichhaltige Schrifttum verwiesen, für das im Anhang ein nach Jahreszahlen geordneter Auszug gegeben wird. Ein guter Gedanke war die Einbegleitung des Buches durch einen Hinweis auf die gerade beim Spannbeton sehr wichtige Frage des Patentschutzes.

Dem streng systematischen Aufbau der Kapitelfolge entsprechend, behandeln die ersten Kapitel Grundbegriffe und Baustoffe, welche letztere in sehr eingehender Darstellung auf 50 Seiten der Tatsache gerecht werden, daß eine unbedingte Voraussetzung erfolgreicher Anwendung des Spannbetons eine weit über das gewohnte Maß hinausgehende Güte von Stahl und Beton ist. Nicht weniger gründlich werden auf zusammen 85 Seiten Verankerung, Spanngeräte und das Vorspannen selbst behandelt und eine nach dem derzeitigen Stand lückenlose Darstellung dieser den Spannbeton kennzeichnenden Konstruktionseinzelheiten gegeben. Die nächsten 60 Seiten sind dem Verbund, der Längsbeweglichkeit der Spannglieder und dem nachträglichen Auspressen der Spannkanaäle gewidmet. Hierauf folgen Erörterungen über die Einleitung der Spannkraft in den Beton und die Grundsätze der baulichen Durchbildung, was 55 Seiten des Buches in Anspruch nimmt. Die Kapitel 11 bis 15 mit zusammen mehr als 120 Seiten sind der Berechnung vorgespannter Tragwerke gewidmet, wobei die hier entscheidenden Einflüsse von Schwinden und Kriechen gebührend berücksichtigt werden. Der Praktiker wird besonders die Diagramme und Tafeln zur raschen Vorberechnung von Spannbetonbauteilen begrüßen. Bei Besprechung des Bruchsicherheitsnachweises geht der Verfasser, zum Teil abweichend von der DIN 4227, eigene Wege. Um das Erscheinen des Buches nicht zu verzögern, wurden die Stabilitätsprobleme und das Verhalten bei Ermüdungsbeanspruchung nur kurz gestreift und angekündigt, daß sie in den folgenden Auflagen nach Abschluß noch laufender Versuche ausführlicher behandelt werden sollen. Das gleiche gilt für die Besprechung bemerkenswerter Bruchversuche, wofür ein eigenes Kapitel 18 vorgesehen ist. Die letzten Kapitel sind Sondergebieten der Vorspannung (Behälter und Rohre, Fahrbahnen, Schwellen, Maste, Schalen), der Feuersicherheit und Hinweisen für die Bauausführung, Leegerüste und dgl. gewidmet. Ein kurzer Abriß der geschichtlichen Entwicklung beschließt das Buch.

Die Fülle des Stoffes setzt auch den im Spannbetonbau erfahrenen Fachmann in Erstaunen und kein Leser wird das Buch ohne reichen Gewinn für sein Wissen aus der Hand legen. Für den an der neuen Bauweise ausführend interessierten Praktiker wird das Werk sehr rasch zum unentbehrlichen Handbuch und Ratgeber werden. *L. Seltenhammer, Wien.*

Mécanique vibratoire. Von *R. Mazet*. Mit einem Vorwort von M. M. Roy. Mit 159 Textabb., XIX, 280 S. Paris et Liège: Librairie polytechnique Ch. Béranger. 1955.

Der vorliegende Band enthält eine moderne Schwingungsmechanik, die den Berechnungsingenieur in die neuesten Methoden einführt, die in den letzten Jahren zur Bewältigung der schwierigen schwingungstechnischen Probleme entwickelt wurden, wie sie im Maschinenbau, in der Flugtechnik und in verschiedenen Zweigen der Elektrotechnik auftreten.

Das Werk bringt zunächst eine allgemeine Einführung in die Behandlung technischer Schwingungsprobleme und geht dann auf die ungedämpften und gedämpften Schwingungen mit einem Freiheitsgrad ausführlich ein, wobei sowohl mechanische als auch elektrische Systeme behandelt werden. In den nächsten Abschnitten werden gekoppelte Schwinger mit zwei und mehreren Freiheitsgraden sowie kontinuierliche Systeme besprochen. Den mit einem Energiereservoir verbundenen Schwingern ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Hier werden Fragen nach der Stabilität der Systeme eingehend erörtert. Der letzte, leider etwas zu kurz geratene Abschnitt geht auf nichtlineare Schwingungsprobleme ein.

Die Kenntnis der Grundlagen der Mechanik einschließlich der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art wird vorausgesetzt, die erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse

erstrecken sich auf die Grundlagen der Heavisideschen Operatorenrechnung, der Laplace-Transformation und der Matrizenalgebra.

Der behandelte Stoff hält stets den engen Anschluß an Probleme der Praxis und bietet für den Fortgeschrittenen eine Fülle von Anregungen und Belehrungen, die dem Werk einen hohen instruktiven Wert verleihen.

G. Heinrich, Wien.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie. Von W. Schumann. (Mitteilungen aus dem Laboratorium für Photoelastizität an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Herausgegeben von H. Favre: Nr. 6.) Mit 69 Textabb., 84 S. Zürich: Verlag Leemann. 1955.

Es werden die Spannungen bzw. Momente abgeschätzt, die sich in Körpern von unendlicher Ausdehnung bzw. endlicher linearer Ausdehnung ergeben, wenn auf einen kleinen Teilbereich (Fläche oder Volumen) dieser Körper bestimmte Kräftesysteme wirken. Nach diesen lokal qualitativen Aussagen werden für die beidseitig eingespannte, dünne Platte auch quantitative Aussagen gemacht.

Der Biegezustand einer Platte läßt sich immer durch eine Greensche Funktion darstellen, die der Differentialgleichung $\Delta \Delta Z = 0$ genügt. Zweimalige Differentiation ergibt den „Greenschen Tensor m “, der in Reihe entwickelt auf die „Ableitungen des Greenschen Tensors“ führt. Diese sind nur abhängig von den Randbedingungen der Platte und der Lage des Koordinatenursprungs. Sie ergeben mit Integralausdrücken I, die leicht zu ermitteln sind und nur von der Art des Lastsystems abhängen, Reihen zur Bestimmung der Biegemomente.

Die Biegemomente in einer Platte lassen sich daher für verschiedene Belastungsfälle relativ einfach errechnen, wenn die Ableitungen des Greenschen Tensors für diese Platte bekannt sind. Deren Berechnung ist nur in einigen Fällen gelungen, es ist daher zu begrüßen, daß in dieser Arbeit ein Verfahren für ihre punktweise Ausmessung eingehend erörtert wird. (Für die hiebei erforderliche Ausmessung von Momenten bedient sich der Verfasser der spannungsoptischen Methode von H. Favre und B. Gilg.) Dieses Verfahren versagt allerdings in der Nähe der Lastangriffsstelle. Für Kräftesysteme mit verschwindender resultierender Kraft, Dyname oder verschwindenden dyadischen Produkten der Kräfte mit den Ortsvektoren gelten dort sehr genau die Ableitungen des Tensors für die unendlich ausgedehnte Platte. In diesen Fällen ist die Ermittlung der Biegemomente für den ganzen Bereich der Platte möglich.

Für die technisch häufigeren Fälle der gewichtsbelasteten, dünnen Platten können die Momente in der Nähe der Lastangriffsstelle mit Hilfe der Greenschen Funktion jedoch weiterhin nur errechnet werden, wenn diese auf andere Art gefunden wurde.

G. Schneeweiß, Wien.

Astronautica Acta. Im Auftrage der Internationalen Astronautischen Föderation bringt der Springer-Verlag Wien nunmehr eine den Zielen dieser Gesellschaft gewidmete Zeitschrift heraus, die vierteljährlich erscheinen soll. Die klangvollen Namen der Herausgeber, wie Wernher v. Braun und E. Sänger zusammen mit F. Hecht als Schriftleiter, garantieren nicht allein hohes wissenschaftliches Niveau, sondern auch konsequenten Ausbau der den Problemen der Raumfahrt zugedachten Zeitschrift.

Der Griff nach den Sternen gehört nicht mehr in das Reich einer ungebändigten Phantasie, denn der technische Fortschritt hat es ermöglicht, neue Antriebsmaschinen zu entwickeln, mit welchen man in nicht zu ferner Zeit ein erstes großes Ziel — die Überwindung der Erdschwere — zu erreichen hofft. Aber selbst wenn nur eines der praktischen Ziele — wie etwa der Transkontinent-Verkehr in und außerhalb der Stratosphäre — realisiert werden soll, wie zahlreich sind die Probleme flugtechnischer, physikalischer, chemischer und medizinisch-biologischer Natur, die alle gelöst sein wollen. Hier gilt es vielleicht mehr als anderswo, den Gehalt der Dinge mit äußerster Kritik zu prüfen. Den rechten Weg zu zeigen, wird Aufgabe der Astronautica Acta sein. Ihr Erscheinen wird von allen jenen willkommen geheißen werden, welche an die Kühnheit des menschlichen Geistes glauben, von der ewigen Sehnsucht nach Wissen erfüllt sind und ein mutiges Herz besitzen.

H. Nowotny, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastel 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

	Seite
E. Reissner, On Torsion with Variable Twist.	218
E. Tschech, Bemerkungen zur Theorie der Membranschalen. (Mit 7 Textabbildungen.)	224
H. Weirich, Zur Ermittlung des Trägheitspoles und der Trägheitspolkurve. (Mit 5 Textabbildungen.)	230
H. Winter, Beitrag zum hydraulischen Verzweigungsproblem. I. (Mit 5 Textabbildungen.) .	239
H. Ziegler, Zum Problem der großen Spannweiten. (Mit 9 Textabbildungen.)	250
<i>Buchbesprechungen</i>	262

Ackeret, J., Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern; Sprenger, H., Über thermische Effekte in Resonanzrohren; Plaskowski, Z., Schubvermehrung durch Strahlmischung (R. Bruniak). — Bechert, K. und Chr. Gerthsen, Atomphysik; Band III, 1. Teil, 3. Aufl., und Band IV, 2. Teil, 3. Aufl. (W. Thirring). — Leonhardt, F., Spannbeton für die Praxis (L. Seltenhammer). — Mazet, R., Mécanique vibratoire (G. Heinrich). — Schumann, W., Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie (G. Schneeweiß). — Astronautica Acta (H. Nowotny).

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes

Von

Karl Federhofer

Professor an der Technischen Hochschule Graz

Mit 35 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. XII, 179 Seiten. Gr.-8°. 1950

Steif geheftet S 138.—, DM 23.—, \$ 5.50, sfr. 23.50

Aus den Besprechungen:

„... Das vorliegende Werk des bekannten Autors stellt im wesentlichen eine Erweiterung unserer Kenntnisse in der Schwingungsforschung dar. Wird doch im Gegensatz zu den bekannten Standardwerken über technische Schwingungsprobleme der Fall gekrümmter Stäbe einer eingehenden Behandlung unterzogen. Der Verfasser beschränkt sich aber nicht nur auf die allgemeine Behandlung der Probleme, sondern er ist bemüht, bis zur zahlenmäßigen Auswertung jedes Problems vorzudringen. So findet man auch die Näherungsverfahren in vollkommener Art durchgeführt, und es ist dem Leser möglich, mittels der zahlreichen Tabellen und Darstellungen jedes einschlägige Problem auch rasch überschlagsweise zu beurteilen.“

Acta Physica Austriaca

„Die Eigenschwingungen der Bogenträger und des Kreisringes sind in zahlreichen Abhandlungen teilweise weitgehend behandelt worden, jedoch fehlte bisher eine so zusammenfassende Darstellung, wie sie das vorliegende, dem Andenken F. Wittenbauers gewidmete Werk bietet. Die reichen Erfahrungen des Verfassers gerade auf diesem Gebiet konnten ihn wie keinen zweiten zu einer solchen Arbeit befähigen. ...“

Konstruktion

“... Book is orderly, compact, and contains considerable information on vibrations of curved members and circular rings, and should be of interest to aeronautical, electrical, mechanical, and structural engineers.”

Applied Mechanics Review

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Aufgaben aus der Hydromechanik. Von Karl Federhofer, o. Professor an der Technischen Hochschule Graz. 245 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 235 Textabbildungen. V, 221 Seiten. Gr.-8°. 1954.

Steif geheftet S 144.—, DM 24.—, \$ 5.70, sfr. 24.50

Ganzleinen S 162.—, DM 27.—, \$ 6.45, sfr. 27.70

Aus den Besprechungen:

„Den bestbekannten drei Bänden *Federhofers* betreffend Aufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers hat sich nun in erfreulicher Weise ein weiterer Band zugesellt. Er behandelt in 14 Abschnitten Aufgaben aus der technischen Hydromechanik inklusive Grundwasserbewegung und Modellregeln. Auch dieser neue Band ist ein äußerst wertvoller Wegweiser, der aufzeigt, wie die theoretischen Lehren der Hydromechanik auf praktische Aufgaben anzuwenden sind. Die Aufgabenstellung, zunächst für den Studierenden bestimmt, ist stets klar umrissen und der Gang der Lösung in exakter und doch leichtverständlicher Weise dargelegt. Das Buch ist auch eine *sehr notwendige Ergänzung von Vorlesung und Lehrbuch*. Denn in beiden können Beispiele nur in beschränkter Anzahl gebracht werden, weil es entweder an Zeit oder an Raum mangelt. Insbesondere beim Ingenieur findet die Macht des Wissens in seinem Können ihren sinnfälligen Ausdruck, und so werden alle, die mit oder am Wasser zu tun haben, diese wertvolle, vom Verlag aufs beste ausgestattete Neuerscheinung dankbarst begrüßen.“

Österreichische Wasserversorgung

„... Die Auswahl und die Reichhaltigkeit der Aufgaben in geschickter pädagogischer Darstellung läßt die langjährige Erfahrung des Verfassers als Hochschullehrer erkennen. Da bisher gerade für die Hydromechanik nur wenige deutschsprachige Werke mit zahlreichen gelösten Aufgaben der Praxis vorhanden sind, ist dieses Buch sehr zu begrüßen.“

Der Bauingenieur

„Vor einigen Jahren hat der Verfasser drei Bände mit Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers herausgegeben. Das vorliegende Buch setzt diese ausgezeichnete Sammlung mit Aufgaben aus der Hydromechanik würdig fort. Die Hydrostatik ist mit Problemen über Niveauflächen, Druck auf Begrenzungsflächen und schwimmende Körper vertreten, die Hydrodynamik mit Ausfluß-, Laminarströmungs-, Rohrleitungs- und Schwingungsproblemen, ferner mit Kapiteln über Grundwasserströmung, komplexe Strömungstheorie und Modellmechanik. Die Aufgaben sind ausnahmslos interessant. Sie weisen verschiedenen Schwierigkeitsgrad auf und vermögen damit jeden Leser zu fesseln. Wie schon bei der früheren Sammlung, so besteht auch hier der besondere Reiz im systematischen Aufbau sowie in der Ausführlichkeit, mit der die Lösungen entwickelt werden. Damit bietet das Buch weit mehr als sein bescheidener Titel andeutet. ...“

Schweizer Bauzeitung

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von Dr. Karl Federhofer, o. Professor an der Technischen Hochschule Graz. In drei Teilen.

Erster Teil: Statik. 165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabbildungen. V, 130 Seiten. Gr.-8°. 1950.

Steif geheftet S 58.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

Zweiter Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabbildungen. IV, 103 Seiten. Gr.-8°. 1951.

Steif geheftet S 58.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

Dritter Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 191 Textabbildungen. V, 139 Seiten. Gr.-8°. 1951.

Steif geheftet S 58.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

Alle drei Teile in einem Band gebunden: Ganzleinen S 189.—, DM 31.50, \$ 7.50, sfr. 32.30

Aus den Besprechungen:

„Die Sammlung verrät in Auswahl und Reichhaltigkeit die langjährige Lehrerfahrung des Verfassers. Sie stellt eine sehr willkommene Ergänzung zu deutschen Lehrbüchern dar, weil diese im allgemeinen nur wenige Übungsbeispiele enthalten, und sie eignet sich in ausgezeichneter Weise zur Vertiefung des Studiums und zum Einüben der Anwendung. Die Aufgaben betreffen die Bewegung des freien und des geführten Massenpunktes, die Kinematik und Kinetostatik der ebenen Systeme, kleine Schwingungen sowie die Bewegung veränderlicher Massen. Auch die Lösung, die jeder Aufgabe beigelegt ist, läßt in der Ausführlichkeit und Klarheit ihrer Darstellung nichts zu wünschen übrig.“

VDI-Zeitschrift

„... Das Buch, das in erster Linie den Studierenden bei der Ausarbeitung ihrer Übungsaufgaben sowie bei der Prüfungs-, vorbereitung Anleitung und Hilfe geben soll, kann darüber hinaus dem in der Praxis stehenden Ingenieur als Repetitorium der Statik starrer Körper sehr empfohlen werden.“

Konstruktion

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria